e) Índice de agressividade para o calcáreo

I — *Definição*

Chama-se índice de agressividade da água para o calcáreo a diferença entre o teor de CO_2 combinado existente na água depois do contacto com o CO_3Ca e o teor de CO_2 combinado existente na água antes do ensaio

II — *Fundamento do método*

[Vidé Arts. «pH» e «Anidrido carbónico combinado (alcalinidade)»].

O carbonato de cálcio dissolve-se na água sempre que nesta haja anidrido carbónico agressivo.

Diz-se anidrido carbónico agressivo — o que excede o teor de anidrido carbónico de equilíbrio

Diz-se anidrido carbónico de equilíbrio — o CO_2 que é necessário e suficiente para manter em dissolução os bicarbonatos alcalino-terrosos.

III — *Reagentes*

Carbonato de cálcio lavado e seco.

Lavar com água destilada quente até que as águas de lavagem, levemente aciduladas pelo ácido azótico, não turvem pelo soluto de azotato de prata.

IV — *Material*

a) 2 frascos de vidro neutro de 500 cm^3

b) Funil e filtro

V — *Técnica*

Encher por completo com a água a ensaiar o frasco contendo ~ 2 gramas do carbonato de cálcio (Vidé «Reagentes»). Rolhar e deixar em contacto durante 48 horas, agitando frequentes vezes.

Decorrido este tempo, filtrar.

Determinar o anidrido carbónico combinado (alcalinidade) e o pH da água filtrada (Vidé Artigos «Anidrido carbónico combinado» e «pH»).

VI — *Cálculos*

(Vidé artigos «pH» e «Anidrido carbónico combinado»).

$$\text{Ind. calcáreo} = CO_2\ \text{comb.}_f - CO_2\ \text{comb.}_i$$

ou

$$\text{I calcáreo} = pH_f - pH_i$$

Em que:

Ind. calcáreo — é o índice de agressividade para o calcáreo.

CO_2 comb.$_f$ — é o teor de CO_2 combinado existente na água depois do contacto com o CO_3Ca (final).

CO_2 comb.$_i$ — é o teor de CO_2 combinado existente na água antes do ensaio (inicial).

pH_f — é o pH da água depois do contacto com o CO_3Ca (final).

pH_i — é o pH da água antes do ensaio (inicial).

f) Índice de agressividade para o chumbo

I — *Definição*

Chama-se índice de agressividade da água para o chumbo a diferença entre o teor em chumbo da água depois do contacto com o metal e o teor em chumbo da água antes do ensaio.

II — *Fundamento do método*

(Vidé Art. «Chumbo»).
O chumbo dissolve-se na água sempre que se verifique a presença de oxigénio dissolvido e anidrido carbónico livre.

Reacções:

$$Pb + O + OH_2 \rightarrow (OH)_2\,Pb$$
$$2\,CO_2 + (OH)_2\,Pb \rightarrow (CO_3H)_2\,Pb$$

A presença de quantidade elevada de cloretos e de azotatos favorece igualmente a solubilidade do chumbo na água.

II — *Amostra*

Colher 2.500 cm^3 e começar o ensaio «in loco».

IV — *Reagentes*

10 pedaços de chumbo decapados, de forma paralelipipédica, com as seguintes dimensões:

$$\sim 20\ mm \times \sim 10\ mm \times \sim 5\ mm$$

IV — *Material*

1 frasco de 2.500 cm^3 com rolha esmerilada
1 funil e filtro
1 matrás de Erlenmeyer de 2.000 cm^3.

VI — *Técnica*

Encher por completo com a água a ensaiar o frasco contendo os paralelipipedos de chumbo. Rolhar. Deixar em contacto durante 15 dias, agitando cuidadosamente, pelo menos duas vezes por dia.
Decorrido este tempo, filtrar e no filtrado dosear o chumbo (Vidé Art. «Chumbo»).

VII — *Cálculos*

(Vidé Art.º «Chumbo»).

$$Ind\ Pb = Pb_f - Pb_i$$

em que:

Ind. Pb — é o índice de agressividade para o chumbo.
Pb_f — é o teor em Pb^{++} da água depois do contacto com o chumbo (final).
Pb_i — é o teor em Pb^{++} da água antes do ensaio (inicial).

(Continua)

Fábrica Nacional de Condutores Eléctricos, L.da

VENDA NOVA — AMADORA

•

CONDUTORES ELÉCTRICOS

C E L

Fabricados pela indústria nacional segundo as Normas de segurança das instalações de Baixa Tensão

•

CONCESSIONÁRIOS GERAIS:

SODIL — Sociedade Distribuïdora, L.da

R. NOVA DA TRINDADE, 15-C

LISBOA

TABELAS TÉCNICAS

PARA

ENGENHARIA CIVIL

Compiladas por Nuno Abrantes e A. Celestino da Costa
Sob a direcção do Prof. VICENTE FERREIRA

2.ª EDIÇÃO

INSERE: Tabelas matemáticas; Tabelas com características de diversos materiais; Perfis laminados, simples e compostos; Tabelas para o cálculo de peças compridas comprimidas (Fórmulas de Rankine, Euler e Tetmaxer, Vierendel), Tabelas de betão armado; : : : : Esgotos, etc. : : : :

À venda na redacção da TÉCNICA

Preço 65$00

Para assinantes 10 % de desconto

Companhia União Fabril

Sede: Rua do Comercio, 49

LISBOA

O MAIOR AGRUPAMENTO INDUSTRIAL DA PENINSULA IBÉRICA

Fábricas em:
Alferrarede, Barreiro, Canas de Senhorim, Lisboa, Mirandela, Óbidos, Porto, Soure e Vila Nova de Gaia.

Superfosfatos, Sulfatos de Cobre, Enxofre, Sabões, Acidos, Oleos industriais e alimentares, Azeites, Torteame, Sacarias, Grossarias, Fios, Carpetes e Mangueiras.

Oficinas de:
Construções metalicas, Mecânica geral de Automoveis e Engrenagens

Fundição de:
AÇO, FERRO E OUTROS METAIS

Construção Naval

(Arrendataria do estaleiro naval da A. G. P. L.)

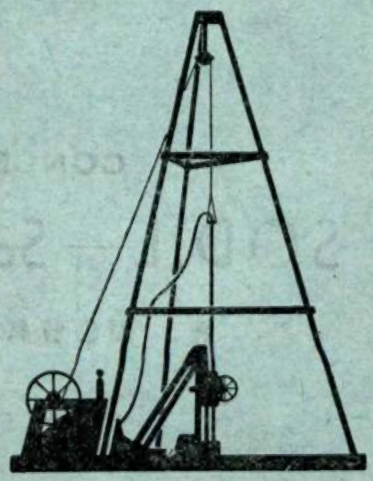
Metalurgia de Ouro e Prata — Refinação electrolitica

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas
Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico
Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo
Rebocos comprimidos por «cement gun»
Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no país e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º—LISBOA Tel. 2 8685

Circuitos conjugados idênticos sujeitos a tensão de frequência variável

POR ARMANDO PEREIRA DOS REIS MIRANDA

(Do Curso de Engenharia Electrotécnica)

C. D. 621.396

Justificação — No decurso da preparação do exame de telecomunicações fui levado com interesse crescente e por vezes não pouca surpresa a estabelecer vários gráficos relacionados com este ponto da matéria.

Embora em princípio este trabalho se destinasse a satisfazer apenas uma curiosidade pessoal, resolvi depois publicá-lo por ter sido conduzido a conclusões interessantes, algumas das quais pouco divulgadas ou porventura inéditas.

Vacilei na maneira de o apresentar, entre as duas alternativas:

1.º — Refundir os quadros de valores e considerações, uma vez chegado ao fim do trabalho, de modo a sistematizá-lo.

Este processo obrigava-me a refazer parte dos cálculos sob pena de ficar incoerente, com o inconveniente de perda considerável de tempo.

2.º — Apresentar o trabalho do modo progressivo como os problemas se me foram sucedendo; justificando assim o maior rigor de uns cálculos em relação a outros, em vista do fim a obter.

Optei pelo segundo método e, sendo assim, alguns gráficos admitem a simetria das curvas em relação à frequência central ($\gamma = 1$) enquanto que outros estão traçados sem essa restrição.

INTRODUÇÃO

Relações e expressões utilizadas. — Segue-se em todo o trabalho a notação usada na cadeira de Telecomunicações.

Impedância aparente do primário (montagem em série)

$$\overline{Z}_{1ap} = \overline{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}_2} = \sqrt{(R_1 + K^2 R_2)^2 + (X_1 - K^2 X_2)^2} \; e^{j \operatorname{arctg} \frac{X_1 - K^2 X_2}{R_1 + K^2 R_2}}$$

em que

$$K = \frac{\omega M}{Z_2}$$

Considerando, como sempre o faremos no seguimento, que os dois circuitos são idênticos vem simplesmente

$$\overline{Z}_{1ap} = \overline{Z} + \frac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}} = \sqrt{R^2 (1 + K^2)^2 + X^2 (1 - K^2)^2} \; e^{j \operatorname{arctg} \frac{X (1 - K^2)}{R (1 + K^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

em que

$$K = \frac{\omega M}{Z} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Impedância aparente do secundário

$$\overline{Z}_{2ap} = Z_{2ap} \cos \varphi_{2ap} + j\, Z_{2ap} \operatorname{sen} \varphi_{2ap}$$

em que

$$Z_{2ap} = \sqrt{R^2 \left(\frac{1}{K} + K\right)^2 + X^2 \left(\frac{1}{K} - K\right)^2}$$

NOTA — As grandezas sem índice (ω_0 R, X, Z e φ) referem-se ao circuito simples (a um deles visto que são idênticos).

e

$$\varphi_{2ap} = -\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{X\,(1 - K^2)}{R\,(1 + K^2)} + \operatorname{arctg} \frac{X_1}{R}\right) \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

Estas equações derivam do sistema:

$$\begin{cases} \overline{Z}\,\overline{I}_1 + j\,\omega\,M\,\overline{I}_2 = \overline{E} \\ \overline{Z}\,\overline{I}_2 + j\,\omega\,M\,\overline{I}_1 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} \overline{I}_1 = \dfrac{\overline{E}}{\overline{Z} + \dfrac{\omega^2 M^2}{\overline{Z}}} & \ldots\ldots \quad (4) \\ \overline{I}_2 = -\dfrac{j\,\omega\,M\,\overline{I}_1}{\overline{Z}} & \ldots\ldots \quad (5) \end{cases}$$

por uma transformação simples que não nos interessa agora.

A condição de ressonância da corrente secundária, expressa pela anulação da reactância aparente do primário é

$$\frac{X_1}{X_2} = 1 = K^2 \qquad\qquad (X_1 = X_2 = X)$$

Esta condição no caso que estamos tratando depois de transformada apresenta-se sob a forma

$$k^2 = \frac{1}{Q^2} + \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2$$

(como se mostra no seguimento — Estudo de K)

em que

$k = \dfrac{M}{L}$ coeficiente de conjugação

$\gamma = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ ω_0 = pulsação central (para que estão afinados individualmente os circuitos)
ω = pulsação aplicada

cuja solução é

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q^2}}}}$$

ou

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{1}{Q^2}}}}$$

pulsações para que se dão as ressonâncias da corrente do secundário.

Seguindo porém outro rumo prefiro traçar a curva de $K^2 = f(\gamma)$ que se torna útil no seguimento do trabalho.

ESTUDO DE $K = \frac{\omega M}{Z}$

Transformando esta espressão obtemos

$$K^2 = \frac{\omega^2 M^2}{Z^2} = \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2} = \frac{k^2}{\frac{1}{Q^2} + \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Condições de precisão dos cálculos efectuados e erro cometido na hipótese simplificadora de simetria das curvas em relação a $\gamma = 1$

Considerando que, em quase todos os gráficos, a parte útil está compreendida entre $\gamma = 0{,}96$ e $\gamma = 1{,}04$ vejamos o erro que cometemos: 1.º fazendo determinadas aproximações, 2.º considerando a simetria válida

γ	γ^2	$\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$	$\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2$	$\left(\frac{K}{k}\right)^2_{Q=100}$	$K^2_{\substack{Q=100 \\ \beta=1}}$	$1 - K^2$
0,96	0,92	0,08695	0,00756	130,55	0,01306	~ 0,987
0,96	0,9216	0,08500	0,007225	136,5	0,01365	~ 0,998

O erro não é portanto grave no que diz respeito a aproximações

γ	γ^2	$\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$	$\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2$	$\left(\frac{K}{k}\right)^2_{Q=100}$	$K^2_{\substack{Q=100 \\ \beta=1}}$	$1 - K^2$
1,04	1,08	0,0741	0,0054908	178,89	0,01789	0,9821
1,04	1,0816	0,0755	0,005700	172,4	0,01724	0,9827

Verifica-se que aqui, no que respeita à simetria, o erro já é sensível mas se atentarmos na escala do desenho concluimos poder continuar a desprezá-lo, se tivermos presente que acima da ressonância a curva é ligeiramente mais subida.

Para o valor $(1 - K^2)$ que interessa no cálculo de X_{1ap} a influência é mínima.

O erro diminue à medida que γ tende para *1*.

QUADRO DE VALORES

γ	γ^2	$1-\frac{1}{\gamma^2}$	$\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)^2$	$\left(\frac{K}{k}\right)^2$			
				$Q=\sqrt{1000}$	$Q=100$	$Q=\sqrt{105}$	$Q=\infty$
0,8	0,64	0,5625	0,3163	3,25	3,26	3,26	3,26
0,9	0,81	0,23457	0,055	18,15	18,18	18,18	18,18
0,95	0,9	0,11111	0,01234	75,1	80,4	81	81
0,96	0,92	0,08696	0,00756	117	130,6	130,3	132,2
0,97	0,94	0,06383	0,004075	197	239,5	245	245,6
0,98	0,96	0,04167	0,001737	366	545	572	576
0,985	0,97	0,03093	0,000957	511	946	1.033	1.042
0,99	0,98	0,02041	0,0004165	707	1.935	2.345	2.400
0,995	0,99	0,01010	0,000102	909	4.950	8.930	9.800
0,997	0,997	0,00604	0,0000365	965	7.330	21.500	27.300
1	1	0,00000	0,0000000	1.000	10.000	100.000	∞

Gráfico de $K^2 = f(\gamma)$ para os valores de $Q=\sqrt{1000}=31,6$ $Q=100$ e $Q=\sqrt{10^5}=316$.

Verifica-se que basta variar a escala das ordenadas para que a mesma curva possa servir para vários valores de $\beta = \frac{k}{k_c} = Q\,k$ — basta multiplicar as ordenadas da curva correspondente a $\beta = 1$ por β^2.

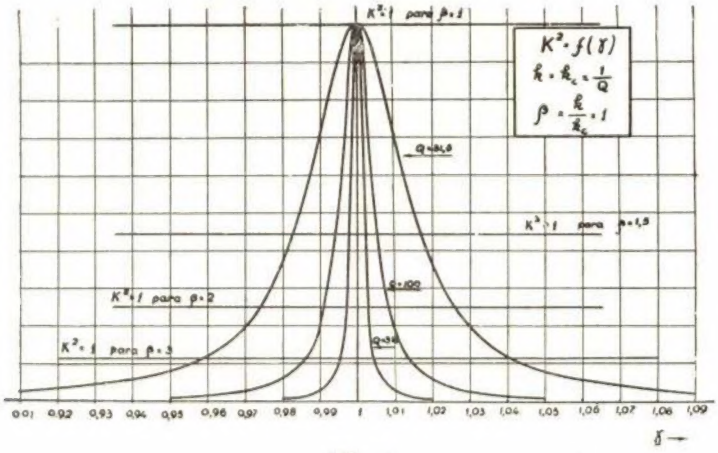


Fig. 1

Em face do gráfico e da expressão da impedância aparente do primário podemos desde já concluir que;

1.º O coeficiente de $R-(1+K^2)$ — tem a mesma representação de K^2 bastando somar a unidade às ordenadas.

A representação de $R_{1\,ap}$ torna-se portanto desnecessária, e podemos ver como a sua variação depende do Q do circuito.

2.º O coeficiente de $X_{1\,ap}$ tem por representação a diferença entre a ordenáda $K^2 = 1$ e a curva

Verifica-se que a reactância aparente do primário pode variar de vários modos conforme $\beta = \frac{k}{kc} = Qk$, isto é, conforme a conjugação; assim, para:

$\beta < 1 - X_{1ap}$ é capacitivo para valores crescéntes de γ e até $\gamma = 1$ em que se anula; para valores de γ maiores que 1, X_{1ap} é indutivo. A variação de X_{1ap} é mais forte que no circuito simples.

$\beta = 1 - X_{1ap}$ valem as conclusões anteriores com a diferença que X_{1ap} varia ainda mais fortemente e se anula simultâneamente com $1 - K^2$.

$\beta > 1 - X_{1ap}$ é capacitivo e decrescente até ao valor de γ para que se anula $1 - K^2$; X_{1ao} apresenta-se indutivo entre este valor de γ e $\gamma = 1$ porque $1 - K^2$ mudou de sinal; para $\gamma = 1$ anula-se porque $X = 0$; volta novamente a ser capacitivo até que $K^2 = 1$, valor em que se anula e finalmente apresenta-se indutivo e crescente.

Este assunto será retomado, podendo desde já assinalar-se as duas influências que actuam X_{1ap} entre as frequências em que se anula $(1 - K^2)$: — X é decrescente e $(1 - K^2)$ é crescente.

Estas curvas, assim traçadas em função de γ servem para qualquer frequência e dão-nos uma ideia correcta de como varia a largura de banda (largura entre picos de corrente secundária — $K^2 = 1$), quando variam Q, β e f_o.

Vê-se ainda da análise das curvas que estas têm o aspecto das curvas de ressonância $K = \frac{\omega M}{Z}$ é do tipo duma impedância anti-ressonante.

De posse do valor K^2 passamos a estudar as impedâncias e correntes primárias e secundárias

$$I_1 = \frac{E}{Z_{1ap}} = \frac{E}{\sqrt{R^2\left(1 + K^2\right)^2 + X^2\left(1 - K^2\right)^2}} \qquad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$I_2 = \frac{\omega M I_1}{Z} = K I_1 = \frac{E}{\frac{Z_{1ap}}{K}} = \frac{E}{Z_{2ap}} \qquad \ldots\ldots \quad (8)$$

Transformemos a expressão da impedância do circuito série

$$\overline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\,X$$

Convém transformar a expressão de X para que se possa calcular melhor quando a frequência varia. Convém, além disso, torná-la dependente de γ e não de f, como temos feito até aqui.

Temos

$$X = \omega L\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{L}{\sqrt{LC}}\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

Por vezes pode convir dar-lhe outra forma

$$X = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) \qquad \ldots\ldots \quad (9)$$

que se presta melhor a ver a influência de γ.

Para que o valor de Z venha proporcionado, vamos admitir

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = 1.000\ \Omega$$

o que, para $Q = 100$, dá $R = 10\ \Omega$.

O valor de $\sqrt{\frac{L}{C}}$ pode ser constante dentro de largos limites de frequência, de modo que não se restringe o problema.

Em todo o caso para outros valores de $\sqrt{\frac{L}{C}}$ não há mais que supor que onde está X se encontra $\frac{1.000\ X}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$ que passa a servir para qualquer caso a menos um factor.

ESTUDO DAS IMPEDÂNCIAS E DAS CORRENTES PARA $\beta = 1{,}5$

Vamos calcular agora

$$X^2,\ X^2_{1ap},\ R^2_{1ap},\ Z^2_{1ap} = R^2_{1ap} + X^2_{1ap},\ Z_{1ap},$$

$$Z_{2ap} = \frac{Z_{1ap}}{K},\ I_1 \text{ e } I_2$$

Seguidamente calculamos

X, X_{1ap} e R_{1ap} que servirá para traçar o diagrama vectorial de Z_{1ap}.

Referimos X, X_{1ap} e R_{1ap} e as grandezas derivadas destas a $\sqrt{\frac{L}{C}} = 1.000\ \Omega$ e $Q = 100$ ($R = 10\ \Omega$).

O gráfico seguinte é mais eloquente que quaisquer considerações de modo que me limitarei a notar que:

1.º — Os máximos de I_2 têm a mesma abscissa que a curva de K^2 no ponto em que $K^2 = 1$; esta abscissa é a que satisfaz consequentemente à *condição de reactância aparente primária nula* e o seu valor é dado pela expressão indicada no princípio do trabalho.

2.º — Como K varia muito ràpidamente perto da ressonância a proporcionalidade entre I_1 e I_2 vem afectada.

3.º — Os máximos da corrente primária serão sempre maiores que os da corrente secundária, variando de $\frac{E}{R}$ para $k = 0$ ($\beta = 0$) até $\frac{E}{2R}$ para o limite teórico $k = 1$ ($\beta = Q$).

QUADRO DE VALORES

γ	K^2	K	$1-K^2$	$(1-K^2)^2$	X^2	X^2_{1ap}	R^2_{1ap}	Z^2_{1ap}	$Z_{1ap\Omega}$	$Z_{2ap\Omega}$	$\frac{I_1}{E}$ m A	$\frac{I_2}{E}$ m A	$R_{1ap\Omega}$	$X\ \Omega$	$X_{1ap\Omega}$
0,8	0,00073	0,027	0,99927		202500	202500	100	202600	450	16.680	2,222	0,06	10	450	450
0,9	0,00409	0,064	0,99591	0,991	44500	44100	100,8	44200,8	210,2	3.288	4,75	0,304	10,04	211	210
0,95	0,01809	0,134	0,9819	0,961	11110	10680	103,6	10783,6	103,85	775	9,64	1,29	10,18	105,7	103,8
0,96	0,0293	0,1712	0,9707	0,94	6960	6540	106	6646	81,5	466	12,38	2,148	10,29	83,4	81
0,97	0,0539	0,232	0,9451	0,892	3830	3410	111	3521	59,35	256	16,88	3,91	10,54	61,9	58,5
0,98	0,1225	0,35	0,8775	0,77	1667	1283	126	1409	38,6	110,2	25,9	9,07	11,225	40,8	35,8
0,985	0,213	0,462	0,787	0,62	928	575	147	722	26,87	58,2	37,2	17,2	12,13	30,45	23,98
0,99	0,435	0,66	0,565	0,319	408	130	206	336	18,33	27,8	54,5	36	14,35	20,21	11,42
0,995	1,112	1,054	—0.112	(—) 0,0125	101	(—) 1,26	445	446,26	21,12	20,02	47,4	49,9	21,12	10,05	(—) 1,126
0,997	1,65	1,2854	—0,65	(—) 0,422	36,3	(—) 15,32	702	713,3	26,78	20,84	37,4	48	26,5	6,02	(—) 3,915
1.	2,25	1,5	—1,25	(—) 1,56	0	0	1056	1056	32,5	21,66	30,8	46,15	32,5	0	0

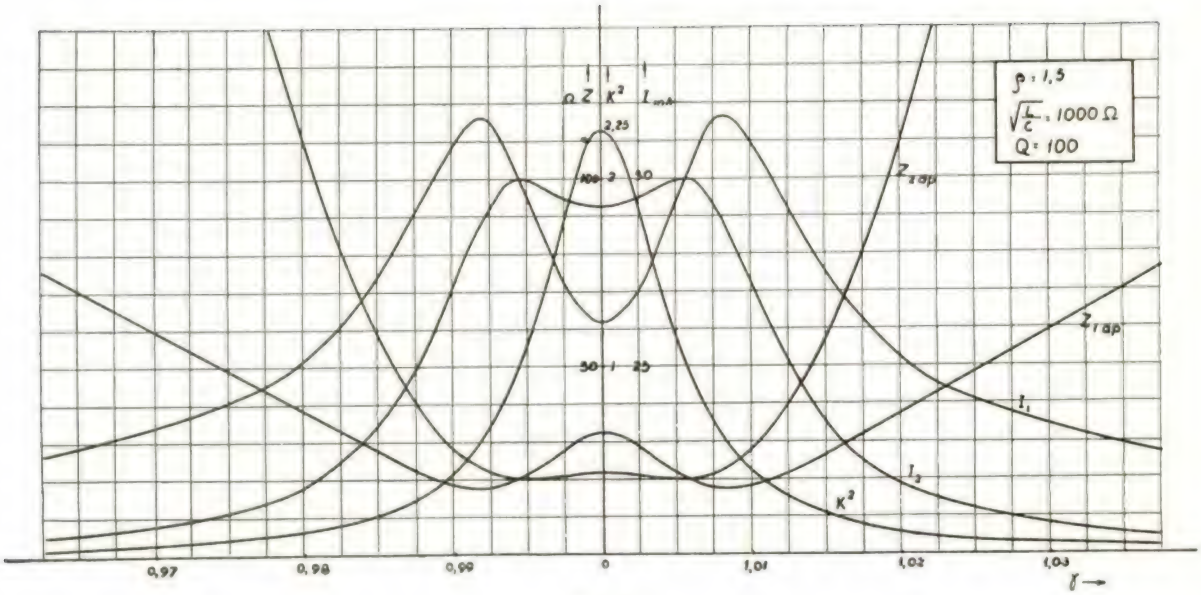


Fig. 2

4.º — A largura de banda para um amortecimento de *6 db* é pouco maior que duas vezes a largura entre picos.

Os $2\Delta\gamma = \frac{2\Delta f}{f_0} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}$ correspondentes aos dois casos são respectivamente :

$$\sigma = 6 \text{ db} \qquad 2\Delta f = 0{,}025 f_0$$
$$\sigma = 0 \text{ db} \qquad 2\Delta f = 0{,}01125 f_0$$

Para $f_0 = 500$ KH$_z$ viria

largura de banda para 6 db —— 12,5 KH$_z$
largura de banda para 0 db —— 5,625 KH$_z$

Por aqui se vê que para larguras de banda entre picos de ~ 9 KH$_z$ (notando ainda que FI menor que 500 KH$_z$, em geral), temos que ir para circuitos de menor Q.

Um circuito simples com o mesmo Q daria para $\sigma = 6$ db uma largura de banda 8,65 KH$_z$ com uma amplificação dupla para a frequência f_0 mas com uma qualidade de resposta muito pior.

Recordando a fig. 1 verifica-se que, com a diminuição do Q, nos aparece menos escarpada a curva e portanto menos vincada a selectividade.

Ao traçar o diagrama de $\overline{Z}_{1ap}$ fiquei surpreendido com o feitio caprichoso que a curva tomava e resolvi traçá-la para outros valores de β .

ESTUDO DA IMPEDÂNCIA APARENTE DO PRIMÁRIO QUANDO β VARIA

Continuando a admitir simetria em relação a $\gamma = 1$ vamos agora calcular R e X para os valores de $\beta = 1$ e $\beta = \sqrt{10} = 3{,}16$ (valor cómodo).

QUADRO DE VALORES

γ	$K^2\beta=1$	$K^2\beta=\sqrt{10}$	$K\beta=1$	$K\beta=\sqrt{10}$	$(1-K^2)$ $\beta=1$	$(1-K^2)$ $\beta=\sqrt{10}$	R_{1ap} $\beta=1$	R_{1ap} $\beta=\sqrt{10}$	X_{1ap} $\beta=1$	X_{1ap} $\beta=\sqrt{10}$
0,8	0,000326	0,00326	0,01805	0,0571	0,9997	0,997	10	10,03	450	448
0,9	0,001818	0,01818	0,0426	0,13485	0,9982	0,982	10,02	10,18	210,5	207
0,95	0,00804	0,0804	0,08965	0,2834	0,992	0,92	10,08	10,8	104,8	97,1
0,96	0,01306	0,1306	0,1143	0,3615	0,987	0,87	10,13	11,3	82,2	73,3
0,97	0,02395	0,2395	0,1547	0,489	0,976	0,76	10,24	12,95	60,4	47,1
0,98	0,0545	0,545	0,2334	0,738	0,9445	0,445	10,54	15,45	38,45	18,1
0,985	0,0946	0,946	0,3076	0,973	0,9164	0.164	10,95	19,46	27,9	4,99
0,99	0,1935	1,935	0,4400	1,391	0,8065	—0,935	11,93	29,35	16,3	(—) 18,9
0,995	0,4950	4,950	0,7045	2,225	0,605	—3,95	14,95	59,5	6,8	(—) 39,7
0,997	0,7330	7,330	0,856	2,707	0,267	—6,33	17,33	83,3	1,61	(—) 38,1
1	1,0000	10,000	1	3,162	0,000	—9	20	110	0,0	0

NOTA: Os valores sublinhados estão errados como se vê fàcilmente, os valores correctos são respectivamente:

para	$\gamma = 0{,}985$	0,064	1,95
para	$\gamma = 0{,}995$	0,505	5,02

Diagrama vectorial de $\overline{Z}_{1ap}$

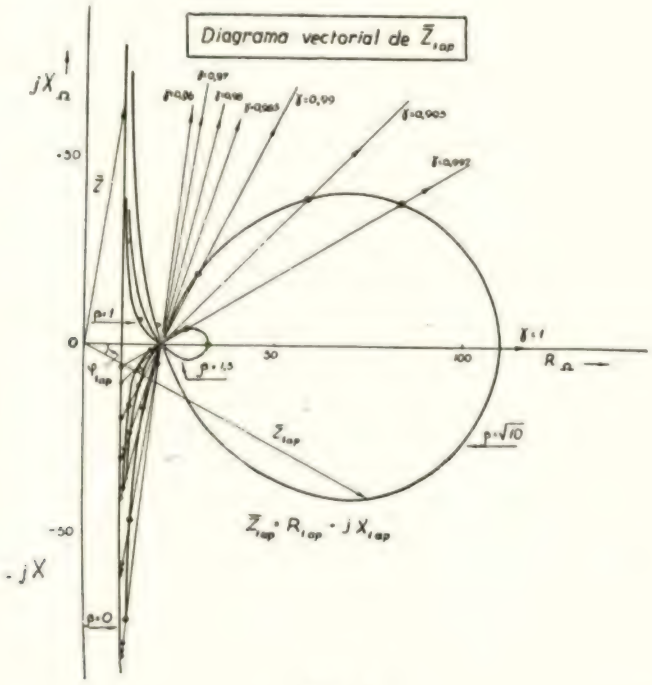


Fig. 3

Enquanto traçava este diagrama, lembrei-me de ver se haveria alguma curva verosímil que ligasse os pontos de $\gamma =$ const sobre as curvas, para os diversos β.

Foi com desconfiança e espanto que reparei no alinhamento perfeito dos pontos correspondentes a $\gamma = 0{,}977$.

Depois de vários ensaios convenci-me que estava perante uma lei natural surpreendentemente simples:

Quando o conjugação varia o ponto representativo da impedância aparente do primário para uma dada frequência (ou γ) desloca-se ao longo de uma recta definida pelo extremo da impedância do circuito único para essa frequência (ou γ) e pelo ponto $2\,R$ (sobre o eixo real — eixo das abscissas).

Isto, no caso estudado de circuitos conjugados idênticos, e pelo menos para pontos próximos do valor da ressonância.

Havia dois pontos que não satisfaziam a esta lei — conclui que estavam errados como na realidade vim a verificar mais tarde; deixei-os ficar e acuso a sua existência por me parecer um exemplo dum caso típico a considerar quando se induzem leis a partir de valores sujeitos a erros.

Considerando como supusemos a representação vectorial $\bar{Z}_{lap}$ no plano imaginário $(R, j\,X)$ temos que $\bar{Z}_{lap} = R_{lap} + j\,X_{lap}$ e $\bar{Z} = R + j\,X$ (para $\beta = o \rightarrow$ circuito único).

O triângulo de vértices (O,O), (R,X) e $(2\,R,O)$ é evidentemente isósceles.

Sendo assim a distância D do ponto $(2\,R,O)$ à extremidade de $Z_{lap} \rightarrow$ ponto (R_{lap}, X_{lap}) é dada por

$$D = \frac{X_{lap}}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{X\,(1 - K^2)}{\dfrac{X}{Z}} = Z\,(1 - K^2) \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

sendo D positivo para baixo e negativo para cima.

Com esta expressão pode calcular-se fàcilmente o diagrama vectorial de Z_{lap} a partir dos valores de Z e $(1 - K^2)$ e tendo em conta a condição atrás enunciada.

Esta fórmula pode tomar vários aspectos se transformarmos a expressão de K^2

$$K^2 = \frac{\omega^2 M^2}{Z^2} = \frac{(\omega_o^2\,\gamma^2)\,(k^2 L^2)}{Z^2} = \left(\frac{L}{C}\right)\frac{\gamma^2}{Z^2}\,k^2 = \left(\frac{L}{C}\right)\frac{\gamma^2}{Z^2}\,\frac{Q^2}{\beta^2} = \frac{R_o^2\,\gamma^2\,\beta^2}{Z^2}$$

$$K = \frac{R_o\,\gamma\,\beta}{Z} = \frac{R\,\beta}{Z} \ldots \text{(Ver nota)} \qquad \ldots\ldots \quad (11)$$

donde vem

$$D = \frac{Z^2 - R_o^2\,\gamma^2\,\beta^2}{Z} = Z - \frac{R_o^2\,\gamma^2\,\beta^2}{Z} \qquad \ldots\ldots \quad (12)$$

D varia com o quadrado de β (com o quadrado da conjugação) quando γ é constante.

Nota — Para que as equações não conduzissem a conclusões erradas fui levado a especificar aqui R, para $\gamma = 1$, por R_o. Considere-se $R = R_o\,\gamma$ podendo tomar-se para uma faixa pequena de frequências $R = R_o$.

Casos particulares

β	γ	Z	D	Observações
0	γ	Z	Z	conclusões evidentes
0	1	R_0	R_0	
1	1	R_0	0	
β	1	R_0	$R_0(1-\beta^2)$	relação verdadeira
$\beta > 1$	$\frac{Z}{R_0\beta}$	Z	0	$\beta < 1$ arrasta $D > 0$

A última linha, correspondente a $D = 0 \rightarrow Z_{1ap} = 2\,R$, dá-nos a relação entre as diversas grandezas *nos pontos de ressonância absoluta do secundário:*

$$Z = R_0\,\gamma\,\beta = R\,\beta \qquad \ldots\ldots \quad (13)$$

é evidentemente só possível para valores de $Z \geqslant R$, valor mínimo possível de Z, e é equivalente a $K^2 = 1$.

Da análise do diagrama vectorial conclui-se que *o primário se comporta sensìvelmente como um circuito anti-ressonante para as frequências (ou γ) compreendidas entre os valores para que se dá a ressonância no secundário* pois que Z_{1ap} percorre uma curva semelhante a uma circunferência sendo indutivo antes, e capacitivo depois da ressonância anti-ressonante que apresenta.

A impedância Z_{1ap} que ele apresenta neste ponto é, notando que $\gamma = 1$ e $Z = R$, e atendendo à expressão (11):

$$Z_{1ap} = R_{1ap} = R\,(1 + K^2) = R + \frac{L}{CR}\,k^2 = R + k^2\,Z_{AR} \qquad \ldots\ldots \quad (14)$$

em que Z_{AR} = impedância anti-ressonante do circuito único.

Vê-se portanto que a semelhança é flagrante e como curiosidade podemos notar que para o caso limite de $k^2 = 1$ viria

$$Z_{1ap} = R + \frac{L}{CR} = R + Z_{AR}$$

Fora destes valores da frequência atrás considerados o primário apresenta-se caracterìsticamente ressonante. Este diagrama vectorial mostra-nos ainda como os máximos da corrente do primário são decrescentes quando β aumenta atingindo apenas o valor $\frac{E}{2R}$ para $\beta = Q$ como já se deixou dito.

Pode além disso prever-se que, desde que se carregue o primário com um secundário, ainda para pequena conjugação, a corrente do primário tem tendência a apresentar um valor menor para $\gamma = 1$ que na vizinhança desse ponto; atendendo à expressão (11) e considerando $\gamma = 1$ temos

$$Z_{1ap} = R\,(1 + \beta^2) \ldots (= 2\,R - D) \qquad \ldots\ldots \quad (15)$$

Este diagrama vectorial de $\overline{Z}_{1ap}$ está a mostrar-se extremamente fecundo de modo que vou dedicar-lhe mais pormenorizada atenção e quanto possível rigoroso estudo.

Demonstração da lei atrás enunciada

Para demonstrar que $\overline{Z}_{ap}$ percorre uma recta quando γ está fixa e k (ou β) variam não temos mais que demonstrar que existe proporcionalidade entre X_{ap} e $-(R_{1ap} - 2R) = (2R - R_{1ap})$ quando γ é constante e k (ou β) variam.

Note-se que, para os sinais serem respeitados o problema nos impõe como no caso de D contar as distâncias positivamente para baixo do ponto (2 R, O) e negativamente para cima.

Escrevemos pois

$$\frac{X_{1ap}}{(-R_{1ap} - 2R)} = C$$

$$C = \frac{X(1 - K^2)}{-R(1 + K^2 - 2)} = \frac{X(1 - K^2)}{R(1 - K^2)} = \frac{X}{R} = \operatorname{tg} \varphi \qquad \ldots\ldots \quad (16)$$

Está demonstrado! E está de acordo com o que se vê no gráfico.

Notemos que $\operatorname{tg} \varphi > 0$ para $\gamma > 1$ e $\operatorname{tg} \varphi < 0$ para $\gamma < 1$, ficando todos os sinais respeitados.

Temos portanto demonstrado que, para circuitos conjugados idênticos, a extremidade do vector $\overline{Z}_{1ap}$ percorre uma recta, que só depende das constantes dos circuito e de γ, quando k varia.

A demonstração é válida enquanto se puder considerar $R = R_0$.

Torna-se agora bastante fácil calcular com rigor os diagramas de Z_{1ap} para vários β.

Para o cálculo temos as expressões

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \text{(pode determinar-se geomètricamente)}$$

$$X = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$D = Z - \frac{R_0^2 \gamma^2 \beta^2}{Z}$$

Continuemos a considerar $\sqrt{\frac{L}{C}} = 1000\ \Omega$ e $Q = 100$ $(R = 10\ \Omega)$ nos cálculos.

Da análise da expressão de D, (12), e do diagrama vectorial $\overline{Z}_{1ap}$ concluímos que, se medirmos a distância do extremo de $\overline{Z}$ ao extremo de $\overline{Z}_{1ap}$ em vez de a medirmos do ponto (2 R, 0), a expressão dessa distância a que chamaremos F vem mais simples que a de D e afinal é ela que nos interessa verdadeiramente.

$$F = D - Z = -\frac{R_0^2 \gamma^2 \beta^2}{Z} = -R_0 \gamma \beta^2 \cos \varphi$$

contando F e D negativamente para cima.

Por ser mais cómodo definiremos (ver expressão (11):

$$F = \frac{R_0^2 \gamma^2 \beta^2}{Z} = R_0 \gamma \beta^2 \cos \varphi = Z K^2 \qquad \ldots\ldots \quad (17)$$

QUADRO DE VALORES

γ	γ^2	$\frac{1}{\gamma}$	X	X^2	Z	$\frac{R^2 \gamma^2}{Z}$	F					
							$\beta = 0{,}1$	$\beta = 0{,}5$	$\beta = 1$	$\beta = \sqrt{2}$	$\beta = 2$	$\beta = \sqrt{10}$
0,980	0,960	1,0204	— 40,4	1632	41,6	2,308	0,02	0,57	2,3	4,61	9,2	23,1
0,985	0,970	1,0152	— 30,2	912	31,8	3,050	0,03	0,76	3,05	6,10	12,2	30,5
0,990	0,980	1,0101	— 20,1	404	22,45	4,37	0,04	1,09	4,37	8,74	17,5	43,7
0,993	0,986	1,007	— 14	196	17,20	5,73	0,06	1,43	5,73	11,46	22,9	57,3
0,995	0,990	1,005	— 10	100	14,14	7,00	0,07	1,75	7,00	14,00	28,0	70,0
0,997	0,994	1,003	— 6	36	11,66	8,53	0,08	2,13	8,53	17,06	34,15	85,3
0,998	0,996	1,002	— 4	16	10,77	9,26	0,09	2.32	9,26	18,52	37,0	92,6
0,999	0,998	1,001	— 2	4	10,2	9,78	0.098	2,44	9,78	19,56	39,1	97,8
1,000	1,000	1,000	0	0	10,0	10,00	0,10	2,50	10,00	20,00	40,0	100,0
1,001	1,002	0,999	2	4	10,2	9,82	0,098	2,45	9,82	19,64	39,3	98,2
1,002	1,004	0,998	4	16	10,77	9,34	0,09	2,34	9,34	18,68	37,4	93,4
1,003	1,006	0,997	6	36	11,66	8,63	0,08	2,16	8,63	17,26	34,5	86,3
1,005	1,010	0,995	10	100	14,14	7,14	0,07	1,78	7,14	14,18	28,6	71,4
1,007	1,014	0,993	14	196	17,20	5,90	00,6	1,47	5,90	11,80	23,6	59,0
1,010	1,020	0,9901	19,9	396	22,27	4.58	0,04	1,14	4,58	9,16	18,3	45,8
1,015	1,030	0,9852	29 8	888	31,43	3,275	0,03	0,82	3,27	6,55	13,1	32,7
1,020	1,040	0,9804	39,6	1568	40,85	2,545	0,02	0,64	2,54	5,08	10,2	25,4

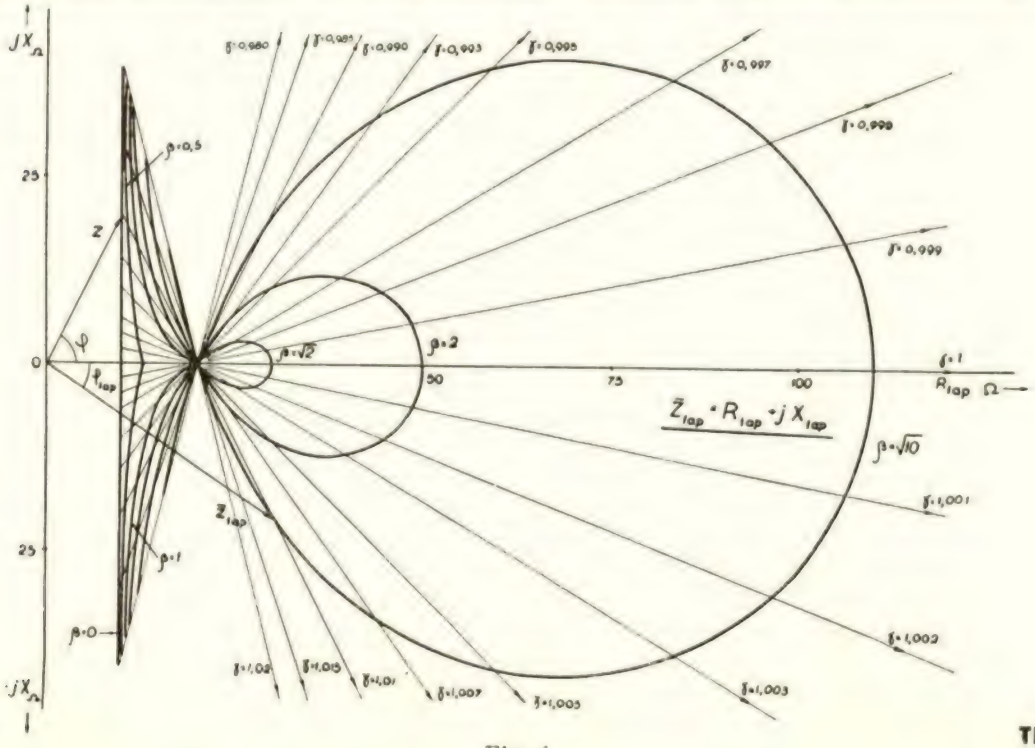


Fig. 4

Este gráfico, embora contenha mais valores de β e não suponha verdadeira a simetria em relação ao eixo real, é menos laborioso de calcular que pelo outro caminho. As indicações que ele nos dá são diversas a saber:

1.° Z_{1ap} podendo portanto medir-se Z_{1ap} e φ_{1ap}.

2.° I_1 para o que basta achar o inverso de Z_{1ap}, dando com aproximação suficiente os γ para os quais I_1 é máximo e quais as desfazagens nesses pontos.

Para achar os γ para os quais I_1 é máximo não temos mais que unir o ponto $(2R, 0)$ com o ponto de Z_{1ap} mínimo (procurado com o compasso por exemplo) e com o valor de X medido ir ao gráfico de $X = f(\gamma)$, ou calcular, ou interpolar entre os valores calculados.

3.° Desde que dividamos Z_{1ap} por $K = \frac{R_0 \gamma \beta}{Z}$ ficamos com Z_{2ap} podendo calcular I^2 e as curvas de selectividade.

4.° Uma das utilizações mais interessantes deste gráfico reside porém na relativa facilidade que traz ao estudo de φ_{2ap}.

Vou ocupar-me a seguir em pormenor desse estudo que, por outro caminho, é extremamente penoso.

Por este diagrama podemos analisar o efeito da falta de simetria: como a impedância varia, depois da ressonância menos ràpidamente que antes, a parte indutiva do diagrama de Z_{1ap} para $\gamma < 1$ é menos aberta que a parte capacitiva do mesmo para $\gamma > 1$; a diferença é porém não muito acentuada.

Este diagrama dá-nos uma ideia correcta da variação de φ_{1ap} com γ e deixa-nos prever o andamento da curva de $-\varphi_{2ap}$.

Desde já podemos ver que $-\varphi_{2ap}$ varia de $-90°$ a $+270°$ ou seja de $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{3\pi}{2}$ quando γ varia de 0 a ∞.

Esta variação de $-\varphi_{2ap}$ entre limites tão afastados, percorrendo uma circunferência completa, e mais que isso atingindo valores superiores a 180° é-nos pouco familiar em electrotecnia ou é-nos familiar (até $\pm 180°$) com um sentido que é difícil de conceber aqui.

Em geral interpretamos uma corrente desfasada de mais ou menos de 90° em relação a uma tensão aplicada como sendo uma corrente gerada e não consumida, assim como essas mesmas desfasagens em relação a uma f.e.m. se consideram como uma corrente de consumo e não gerada; ora aqui trata-se sem dúvida de uma tensão realmente aplicada ao primário e a existência de uma variação tão grande de φ_{2ap} torna a sua interpretação embaraçosa.

Como primeiro passo para uma solução notaremos que a variação se pode considerar como sendo de $-180°$ a $+180°$ devido ao atrazo de $-\frac{\pi}{2}$ introduzido pela transferência da energia de primário para o secundário.

Assim mesmo, fica ainda uma variação de desfasagem de 2π que se compreende perante o diagrama mas de que se não tem um sentido físico concreto.

ESTUDO DA DESFASAGEM ENTRE A CORRENTE DO SECUNDÁRIO E A TENSÃO DO PRIMÁRIO ($-\varphi_{2ap}$)

Analisando as expressões (3) e (5) temos que:

$$-\varphi_{2ap} = \frac{\pi}{2} + \varphi_{1ap} + \varphi \qquad \ldots\ldots \quad (18)$$

Olhando o diagrama vectorial de $\overline{Z}_{1ap}$ veremos que $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ é o ângulo entre $(-j\,X)$ e $\overline{Z}$ ou por ser mais cómodo entre a recta que $\overline{Z}$ percorre e a que $\overline{Z}_{ap}$ percorre, sendo $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) > 90^\circ$ para $\gamma > 1$.

Basta portanto somar ao ângulo assim medido, φ_{1ap} para termos $(-\varphi_{2ap})$, fase de $\overline{I}_2$ em relação a $\overline{E}$.

Como se vê a cada γ corresponde um só valor de $\frac{\pi}{2} + \varphi$ qualquer que seja β.

Os valores de φ_{1ap} dependem simultâneamente de β e γ sendo interessante notar que *para cada valor de γ o ângulo $(-\varphi_{2ap})$ varia do mesmo modo que φ_{1ap}, quando β varia.*

QUADRO DE VALORES

γ	$\frac{\pi}{2}+\varphi$	φ_{1ap}						$-\varphi_{2ap}$					
		$\beta=0{,}1$	$\beta=0{,}5$	$\beta=1$	$\beta=\sqrt{2}$	$\beta=2$	$\beta=\sqrt{10}$	$\beta=0{,}1$	$\beta=0{,}5$	$\beta=1$	$\beta=\sqrt{2}$	$\beta=2$	$\beta=\sqrt{10}$
0,980	+ 13,7	−76,3	−75,3	−74,7	−73	−69	−49	− 62,6	− 61,6	− 61,0	− 59,3	− 55,3	− 35,3
0,985	+ 18	−71,8	−70,7	−68	−63,7	−53,3	− 3	− 53,8	− 52,7	− 50	− 44,7	− 35,3	+ 15
0,990	+ 26	−64	−61	−53,4	−41	−14	+33	− 38,0	− 35	− 27,4	− 15	+ 12	+ 59
0,993	+ 35	−54,7	−49	−34,6	−15,7	+11,2	+37	− 19,7	− 14	+ 0,4	+19,3	+ 46,2	+ 72
0,995	+ 44	−45,8	−37,8	−18,2	− 0,2	+19	+34	− 1,8	+ 6,2	+ 25,8	+43,8	+ 63	+ 78
0,997	+ 58,5	−31,5	−22,2	− 5	+ 6,7	+16,2	+24,8	+ 27,0	+ 36,3	+ 53,5	+65,2	+ 74,7	+ 83,3
0,998	+ 68,2	−21,8	−14,6	− 1,7	+ 5,8	+12,2	+17	+ 46,4	+ 53,6	+ 66,5	+74,0	+ 80,4	+ 85,2
0,999	+ 79	−11	− 7	− 0,3	+ 3,5	+ 6,2	+ 9	+ 68,0	+ 72	+ 78,7	+82,5	+ 85,2	+ 88,8
1,000	+ 90	0	0	0	0	0	0	+ 90,0	+ 90	+ 90	+90	+ 90	+ 90
1,001	+101	+11	+ 7,2	+ 0,5	− 3,2	− 6,5	− 9	+112,0	+108,2	+101,5	+97,8	+ 94,5	+ 92
1,002	+111,8	+21,8	+14,7	+ 1,8	− 5,7	−12,3	−17	+133,6	+126,5	+113,6	+105,1	+ 99,5	+ 94,8
1,003	+121,5	+31,3	+22,3	+ 5	− 6,5	−16,5	−24,5	+152,8	+143,8	+126,5	+115,0	+105,0	+ 97,0
1,005	+135,7	+45,3	+37,8	+18,1	− 0,1	−18,8	−34	+181,0	+173,5	+153,8	+135,6	+116,9	+101,7
1,007	+144,6	+54,5	+49,6	+34,7	+14,5	−12,3	−37,5	+199,1	+194,2	+179,3	+159,1	+132,3	+107,1
1,01	+153,3	+63,0	+61	+52,2	+39,7	+11	+34,2	+216,3	+214,3	+205,5	+193,0	+164,3	+119,1
1,015	+162,0	+71,2	+70,7	+67,9	+62,8	+51	− 3	+233,2	+232,7	+229,9	+224,8	+213,0	+159
1,02	+166	+76	+75,2	+73,8	+72	+65,5	+42,7	+242,0	+241,2	+239,8	+238	+231,5	+208,7

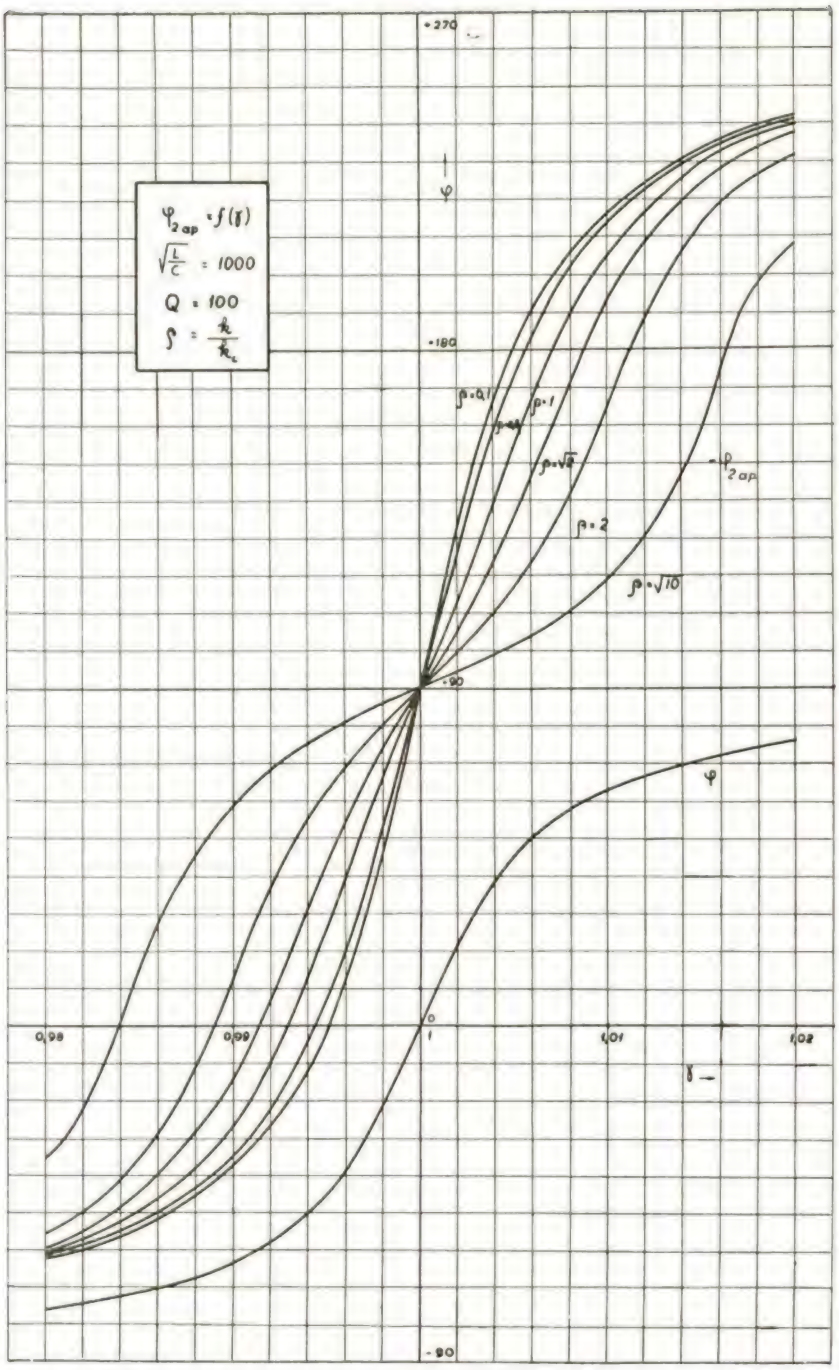


Fig. 5

Este gráfico mostra o comportamento do filtro quanto à distorção de fase e podemos em face da curva também representada para o circuito único fazer a comparação das propriedades do circuito único e do par de circuitos conjugados.

Para o circuito único, e para um enfraquecimento de *6 db* a distorção de fase máxima é de $\pm 60^{\circ}$.

Para um par de circuitos conjugados a distorção de fase varia largamente com β, atingindo para $\beta = 1$ e um amortecimento de *6 db*, $\sim \pm 150^{\circ}$.

Porém para $\beta = 1{,}5$ o andamento da curva das desfasagens é, entre picos da

corrente secundária, semelhante ao da curva do circuito único e dá até, pela largura de banda ser menor, uma distorção de fase menos acentuada.

Considerando a expressão (11) para $K^2 = 1$ temos

$$K^2 = 1 = \frac{R_o^2 \gamma^2 \beta^2}{Z^2} = \frac{R^2 \beta^2}{Z^2} = \beta^2 \cos^2 \varphi$$

Para $K^2 = 1$ vem Z_{1ap} óhmico puro donde

$$-\varphi_{2ap} = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

em que

$$\cos \varphi = \frac{1}{\beta} \qquad \ldots\ldots \quad (19)$$

Esta expressão é curiosa pela sua simplicidade e pode ser útil, sendo válida enquanto se puder considerar $Q = \text{const}$.

COMPLEMENTOS E OBSERVAÇÕES DIVERSAS

Gráfico de X_{1ap}

De posse dos valores para o traçado dos primeiros diagramas vectoriais de $\bar{Z}_{ap}$ para os diversos β pareceu-me interessante fazer a representação de $X_{1ap} = f(\gamma)$ que aqui apresento.

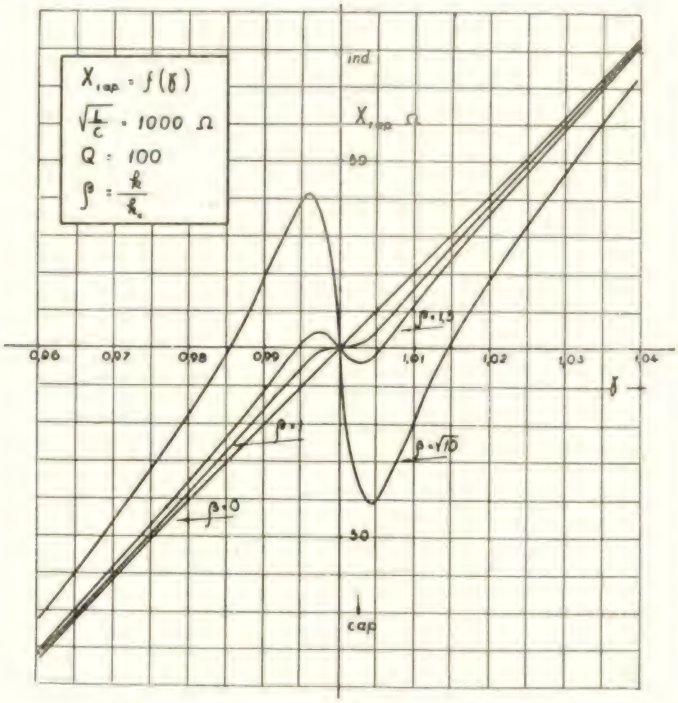


Fig. 6

Os pontos de reactância aparente primária nula são os pontos de ressonância da corrente secundária.

Este gráfico mostra como se comporta a reactância quando β varia e tem o aspecto geral, para $\beta > 1$, do gráfico da reactância de dois circuitos série afinados individualmente para frequencias diferentes postos em paralelo e submetidos a tensão de frequência variável.

Verifica-se aqui, como já atrás foi dito, que entre as frequências para as quais $X_{1ap} = 0$ a curva tem um andamento semelhante ao da reactância de um circuito anti-ressonante.

NOTA — Como nota por vezes útil pode mostrar-se a expressão que toma Z_{1ap} para $\gamma = 1$

$$Z_{2ap} = \frac{Z_{1ap}}{K} = \frac{R\,(1 + K^2)}{K} = \frac{R\,(1 + \beta^2)}{\beta}$$

(ver expressão (11) para $\gamma = 1$).

Sendo assim

$$\sigma_{\gamma=1} = \frac{I_{res}}{I_{\gamma=1}} = \frac{\dfrac{R\,(1 + \beta^2)}{\beta}}{2\,R} = \frac{1 + \beta^2}{2\,\beta}$$

Caso do primário estar montado em anti-ressonância

Abordei finalmente este caso para poder mostrar a acção inversa da anterior que aqui tem o facto de se carregar o primário com um secundário idêntico.

A corrente que induz f. e. m. no secundário e que sofre a sua reacção é a do ramo indutivo de modo que não temos mais que considerar o primário formado por dois ramos: um capacitivo e independente do secundário, outro indutivo sofrendo a reacção do secundário e induzindo neste f. e. m., exactamente segundo as mesmas leis que serviram anteriormente.

Representemos por

$\overline{Z}_{L_{1ap}}$ a impedância aparente do ramo indutivo do primário

$\overline{Z}_c$ a impedância do ramo capacitivo do primário

Z_{1ap} a impedância aparente do primário

Temos, mantendo as outras notações

$$\overline{Z}_{L_{1ap}} = R\,(1 + K^2) + j\,(\omega\,L - K^2\,X_2)$$

$$\overline{Z}_c = -\,j\,\frac{1}{\omega\,C}$$

$$\overline{Z}_{1ap} = \frac{1}{\dfrac{1}{\overline{Z}_c} - \dfrac{1}{\overline{Z}_{L_{1ap}}}} = \frac{\overline{Z}_c\,\overline{Z}_{L_{1ap}}}{\overline{Z}_c + \overline{Z}_{L_{1ap}}}$$

Esta expressão que assim se apresenta bastante complexa simplifica-se extraordinàriamente para $\gamma = 1$ pois que então se verifica

$$\gamma = 1 \begin{cases} K = \beta \\ X_2 = 0 \end{cases} \qquad \omega_0\,L = \frac{1}{\omega_0\,C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

A expressão fica então apenas

$$\overline{Z}_{lap} = \frac{-j\frac{1}{\omega_0 C}\left[R(1+\beta^2) + j\,\omega_0 L\right]}{-j\frac{1}{\omega_0 C} + R(1+\beta^2) + j\,\omega_0 L}$$

$$\overline{Z}_{lap} = \frac{-j\,R(1+\beta^2) + \omega_0 L}{-j + \omega_0 C R(1+\beta^2) + j\,\omega_0^2 LC}$$

$$\overline{Z}_{lap} = \frac{\omega_0 L - j\,R(1+\beta^2)}{-j + \omega_0 C R(1+\beta^2) + j} = \frac{\omega_0 L}{\omega_0 C R(1+\beta^2)} - j\,\frac{R(1+\beta^2)}{\omega_0 C R(1+\beta^2)}$$

$$\overline{Z}_{lap} = \frac{L}{CR}\,\frac{1}{1+\beta^2} - j\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Para valores não muito grandes de β pode desprezar-se a parte imaginária e fica apenas:

$$\overline{Z}_{lap} = \frac{L}{CR}\,\frac{1}{1+\beta^2} = \frac{Z_{AR}}{1+\beta^2}$$

Vê-se que a impedância dum circuito anti-ressonante carregado com um secundário decresce ràpidamente quando β aumenta sendo, para $\beta = 1$ igual a metade da que era no circuito único.

Para o caso limite de $\beta = Q$ $(k = 1)$ vem para expressão de R_{lap}, pois aqui já se não pode desprezar o termo reactivo:

$$R_{lap} = \frac{L}{CR}\,\frac{1}{1+Q^2} = \frac{L}{CRQ^2}\,\frac{1}{\frac{1}{Q^2}+1} = \frac{\omega_0^2 L^2}{RQ^2}\,\frac{1}{\frac{1}{Q^2}+1}$$

$$R_{lap} = \frac{R}{\frac{1}{Q^2}+1} \simeq R = Z_{Res}$$

Este resultado é notável e merece ser comparado com o que se obtém da expressão (14) para $k = 1$

$$Z_{lap} = R + \frac{L}{CR} \simeq \frac{L}{CR} = Z_{AR}$$

Simplesmente agora aparece o termo reactivo muito grande que não deixa Z_{lap} ir tão baixo pois o seu valor mínimo para $\gamma = 1$ é

$$\overline{Z}_{lap} = \frac{R}{\frac{1}{Q^2}+1} - j\sqrt{\frac{C}{L}}$$

O contraste entre as duas montagens está provado, verificando-se aqui mais uma confirmação do princípio geral: a reacção tende a anular a causa que lhe deu origem, e que se manifesta naturalmente nos mais variados fenómenos.

Um tratamento mais pormenorizado deste problema está fora do assunto que nos propusemos tratar e será porventura analìticamente mais difícil se bem que deva ser curioso.

PUBLICAÇÃO N.º 3 DO CENTRO DE ESTUDOS DE ENGENHARIA CIVIL

ESTACAS PARA FUNDAÇÕES

PELO ENG.º CIVIL FERNANDO VASCO COSTA
Assistente do I. S. T. e Bolseiro do I. A. C.

(Continuação)

624.154/5

CAPITULO VIII

Avaliação das cargas que as estacas podem suportar

48 — Generalidades

Se bem que desde há muitos séculos se empreguem estacas, ainda hoje se não sabe ajuizar *a priori*, com a necessária precisão, a grandeza das cargas que podem ser aplicadas às estacas.

O problema da determinação dessas cargas tem despertado, no entanto, desde tempos remotos, grande interesse junto de cientistas e construtores.

Hoje o problema continua a ter actualidade e, salvo para casos particulares, encontra-se bem longe de estar resolvido.

É, porém, absolutamente indispensável a quem tenha de projectar fundações sobre estacas dispor de processos de cálculo que permitam ajuizar, ainda que de um modo aproximado, o comportamento das estacas ao serem carregadas.

Sentímo-nos, por esse facto, na obrigação de incluir neste estudo um capítulo sobre a avaliação das cargas que as estacas podem suportar, muito embora saibamos, de antemão, que ele será forçosamente deficiente e destinado a perder actualidade logo que novos progressos da mecânica dos solos venham esclarecer tão intricado problema.

A carga que a uma estaca ou a um grupo de estacas pode ser aplicada é limitada sempre pela grandeza do deslocamento da cabeça.

O deslocamento da cabeça duma estaca pode ter diferentes causas. Para estacas submetidas a cargas verticais essas causas podem, quanto a nós, classificar-se do seguinte modo:

1) *Ruptura do material da estaca* (fig. 113-1)

Pode ser devida a acidentes de cravação, a defeitos da execução das estacas moldadas ou ainda à má conservação do material da estaca. É muito mais frequente do que em geral se julga.

2) *Encurtamento da estaca* (fig. 113-2)

O encurtamento da estaca, devido à sua compressão, como veremos no parágrafo 49, é sempre muito pequeno e em geral sem influência sobre o comportamento da construção.

3) *Varejamento da estaca* (fig. 113-3)

Apenas é de temer quando a estaca tenha parte do seu comprimento fora do terreno ou quando ela atravesse terrenos lodosos de pequena consistência. Ver adiante o parágrafo 50.

4 — *Afundamento da estaca no terreno* (fig. 113-4)

Este fenómeno tem sido exaustivamente estudado, mas, no entanto, ainda se encontra longe de estar completamente esclarecido.

A maioria dos autores apenas faz referência a esta causa de deslocamento, parecendo desconhecer as restantes.

Para a determinação das cargas que provocam o afundamento das estacas em relação ao terreno circundante utilizavam-se antigamente fórmulas de cravação; mais tarde passaram-se a usar também fórmulas está-

ticas e hoje quase que só se dá crédito a ensaios directos

Nos parágrafos 51 a 61 falaremos desses diversos processos de avaliação das cargas que provocam o afundamento da estaca no terreno, tratando, na medida possível, das influências que podem falsear os seus resultados.

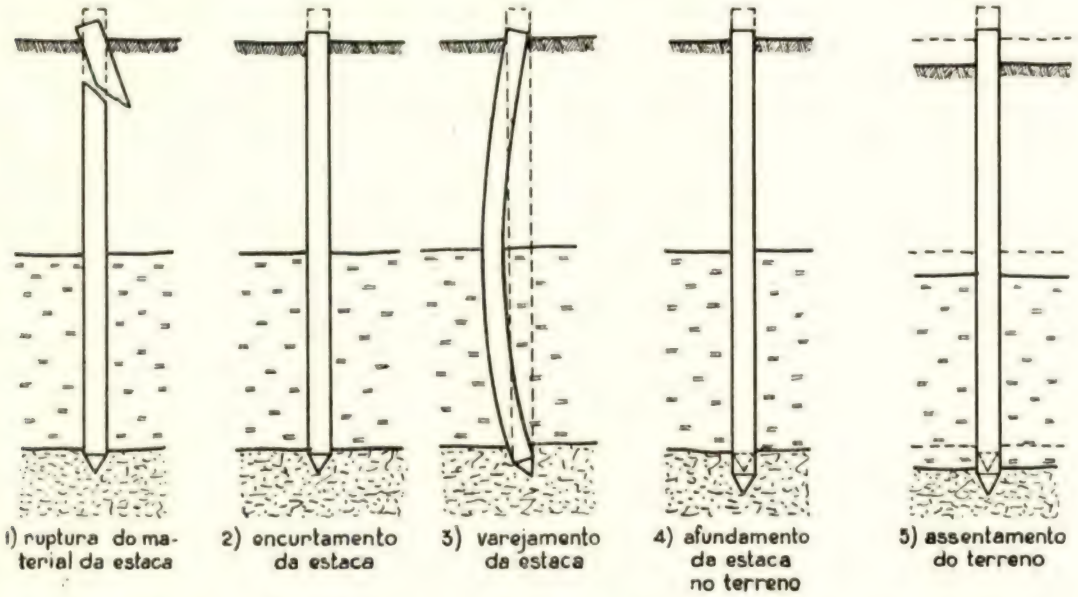


Fig. 113 — Causas do deslocamento da cabeça duma estaca sob a acção de cargas verticais

5 — *Assentamento do terreno* (fig. 113-5)

Só há muito pouco tempo se começou a ter em conta, ao projectar fundações, a possibilidade de o terreno assentar conjuntamente com as estacas.

O assentamento pode consistir na deformação do terreno sob a acção das cargas transmitidas pelas estacas, ou ser devido à consolidação do próprio terreno.

No primeiro destes casos o assentamento do terreno cresce de importância com o número das estacas carregadas, podendo atingir valores elevadíssimos, muitas dezenas de vezes maiores do que os obtidos em ensaios directos sobre estacas isoladas.

Estes ensaios, ao contrário do que muitos julgam, não dão a medida do assentamento do terreno, quando toda a fundação é carregada. Em geral, o assentamento do terreno é absolutamente independente do tipo das estacas.

Graças aos progressos da mecânica dos solos, verificados nos últimos vinte anos, o assentamento do solo de fundação, conjuntamente com as estacas que nele se encontrem enterradas, pode ser determinado prèviamente pelo cálculo, com bastante rigor.

Embora não abordando, neste nosso estudo, o assentamento dos terrenos, no parágrafo 63 voltaremos ao assunto, quando tratarmos das cargas que as estacas podem suportar em grupo.

Acerca da avaliação das cargas que às estacas podem ser aplicadas queira consultar Bennett (1931), Bergeron (1939), Bierbauer (1929), Boontra (1940), Burmister (1940), Chellis (1941), Dietrich (1938), Dorr (1922 e 1932), Granholm (1929), Hege (1942), Kerisel (1939), Komarowski (1930), Kunzel (1935), Krey (1936), Kuball (1931), Santarella (1936), Schenk (1938), Terzaghi (1930 e 1943).

49 — Encurtamento da estaca

As estacas deformam-se muito pouco ao serem carregadas. Como há geralmente o cuidado de estudar a distribuição das estacas

de modo a que recebam cargas proporcionadas às suas dimensões, a deformação do material da estaca é sensìvelmente igual em todas as estacas duma mesma fundação, e, portanto, sem inconveniente para a construção.

Por falta do conhecimento do modo como ao longo da estaca se dá a transmissão das cargas ao terreno, não é fácil calcular a deformação da estaca.

Geralmente calcula-se o encurtamento como se a estaca tivesse um comprimento l', igual ou inferior ao comprimento real l, e estivesse submetida, nesse comprimento, à carga P que actua sobre a cabeça da estaca.

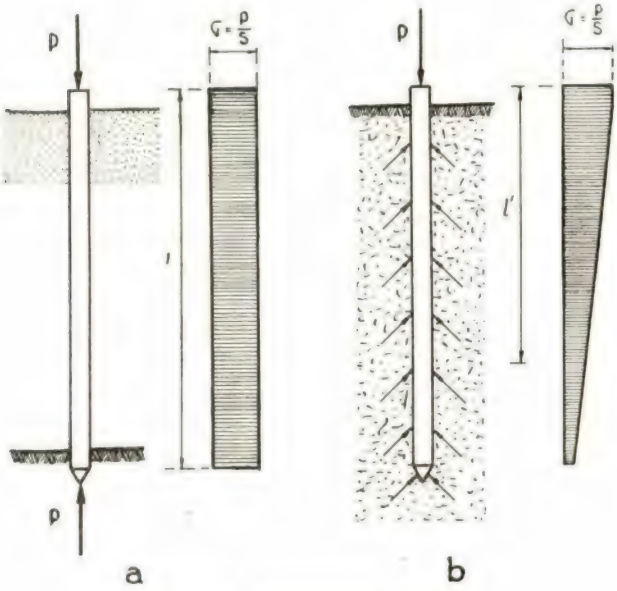


Fig. 114 — Encurtamento da estaca

A deformação Δl da estaca é dada, portanto, pela expressão

$$\Delta l = \frac{l'}{E} \frac{P}{S}$$

onde S representa a secção transversal da estaca.

Para as estacas carregadas de ponta (fig. 114-a) deve tomar-se

$$l' = l$$

Para as estacas flutuantes (fig. 114-b), na falta de melhor indicação, poderá contar-se com $l' = \frac{l}{2}$ (Jacoby 1941, pág. 207) ou $l' = \frac{2l}{3}$ (Agatz 1936, pág. 203).

50 — Varejamento das estacas

Tem sido muito discutida a conveniência da verificação de estabilidade das estacas ao varejamento.

Para as estacas flutuantes, que trabalham por atrito lateral, em virtude de a carga a que estão sujeitas diminuir ràpidamente ao longo delas, nada há a recear, mesmo no caso de serem delgadas e compridas.

Para as estacas que trabalham de ponta as condições já não são tão favoráveis, por se encontrarem em todo o seu comprimento sujeitas à carga que descarrega sobre a sua cabeça. Mesmo, porém, nestas condições, desde que a estaca se encontre completamente mergulhada no terreno, o varejamento não é de temer.

Com efeito, basta que, ao iniciar-se o encurvamento da estaca, ela se encoste mais a um lado do furo em que se encontra enfiada, para provocar da parte do terreno uma reacção suficiente para evitar o aumento de encurvadura [1] (ver Dorr, 1922, pág. 28).

Experiências suecas, citadas por Loos (1937, pág. 153) e por Scheidig (1941, pág. 250) permitiram verificar que um varão redondo, cravado através duma argila pouco consistente até encontrar a rocha, podia ser carregado com 3.000 kg, isto muito embora a fórmula de Euler indicasse 26,5 kg como sendo a carga crítica do varejamento.

Cummings (1938) estudou analìticamente o assunto e verificou a pouca importância do varejamento.

Na América, porém, parece ser normal calcular ao varejamento as estacas que atravessam terrenos pouco resistentes (Jacoby 1941, pág. 140 e 205). O mesmo sucede em Inglaterra, onde Garde-Hansen, numa série recente de artigos, deu grande desenvolvimento ao cálculo do varejamento (Garde-Hansen 1944).

[1] Claro que esta circunstância não é suficiente para justificar a cravação, tal como a já temos visto efectuar por firmas especializadas, de estacas de madeira ligadas topo a topo por um simples espigão de ferro.

Julgamos, no entanto, que o cálculo ao varejamento só é necessário quando, como tantas vezes acontece em obras marítimas, a estaca se encontra desacompanhada em grande parte do seu comprimento acima da superfície do terreno.

Acerca do varejamento das estacas, além dos autores já citados, consulte-se ainda Forssell (1926) e Terzaghi (1943).

51 — Comportamento das estacas durante e após a cravação

A resistência que um terreno opõe à cravação duma estaca é a resistência à penetração rápida. A resistência que um terreno opõe ao afundamento duma estaca carregada é a resistência à penetração lenta. Estas duas resistências são muito diferentes para numerosos terrenos.

Para compreender a razão de ser da diferença de comportamento da estaca durante e após a cravação, é necessário investigar quais as resistências que uma estaca encontra ao ser afundada no solo.

Admite-se geralmente que são:

1) atrito lateral ao longo da estaca (R_a)

2) resistência que, sob a ponteira, o terreno opõe a ser deslocado ou comprimido (R_p).

Para areia e outros terrenos que, logo após a aplicação de cargas, retomam o seu equilíbrio, os dois termos referidos têm valor independente do tempo.

Para eles será:

$$R_a + R_p = \text{Constante.}$$

Para argila, lodos, e, de um modo geral, para todos os terrenos pouco permeáveis, com coesão, os quais só passado algum tempo após a aplicação de cargas retomam o equilíbrio, ambos os termos indicados variam com o tempo.

Terzaghi (1929-a, pág. 282) designou os primeiros terrenos como pertencentes à classe I e os segundos à classe II.

Nestes últimos terrenos sucede geralmente que o atrito lateral R_a cresce e a resistência da ponteira R_p diminui com o tempo de um modo considerável.

Consoante a predominância de um ou outro termo, assim a resistência total duma estaca $R_a + R_p$ aumentará ou diminuirá.

Só por acaso é que a resistência oposta à cravação será igual à resistência sob a acção de cargas estáticas.

Vejamos como tem sido explicada a variação do atrito lateral nos terrenos impermeáveis (Terzaghi 1929-a, pág. 285).

Durante a cravação, sob a acção repetida das pancadas do pilão, o terreno vizinho da estaca é fortemente comprimido pela ponteira.

A água que se encontra dentro dos vazios do terreno, constituindo a sua humidade, ao dar-se a diminuição do volume destes, não podendo deslocar-se por o terreno ser impermeável, primeiro enche-os e depois entra em pressão. Desde que tal se verifique o terreno vizinho da estaca torna-se numa verdadeira película lubrificante, que elimina pràticamente o atrito lateral.

Os movimentos da estaca durante a cravação ajudam a distribuição dessa película e permitem que a água sob pressão procure uma saída para o exterior ao longo da estaca.

Se se suspender a cravação, a água que deu origem à película lubrificante é reabsorvida pelo terreno e o atrito lateral retoma o seu valor normal.

Passemos agora ao estudo da resistência que o terreno opõe ao avanço da ponteira.

Quando se tenta comprimir, sem possibilidade de escorregamento, uma argila, ou qualquer terreno pouco permeável, ela opõe, como é sabido, uma grande resistência. A argila deforma-se, porém, com facilidade, embora muito lentamente, sob a acção de cargas demoradas. Essa lentidão é devida à dificuldade com que a água nela circula.

Os terrenos pouco permeáveis, por esse facto, opõem muito maior resistência ao avanço da ponteira quando a estaca é cravada do que quando é carregada estàticamente.

Falámos acima, ao tratar da variação de valor do atrito lateral, do movimento para o exterior, ao longo da estaca, de água expulsa do terreno pela ponteira da estaca.

Ao retomar-se uma cravação interrompida tal movimento já não é possível. A água que

se encontrar nos vazios do terreno, junto à ponteira da estaca, ao dar-se a sua diminuição de volume, entrará em pressão, sem qualquer possibilidade de se escoar. A resistência oposta pelo terreno ao avanço da ponteira duma estaca cuja cravação se recomeçou pode, por esta razão, atingir valores excepcionalmente elevados.

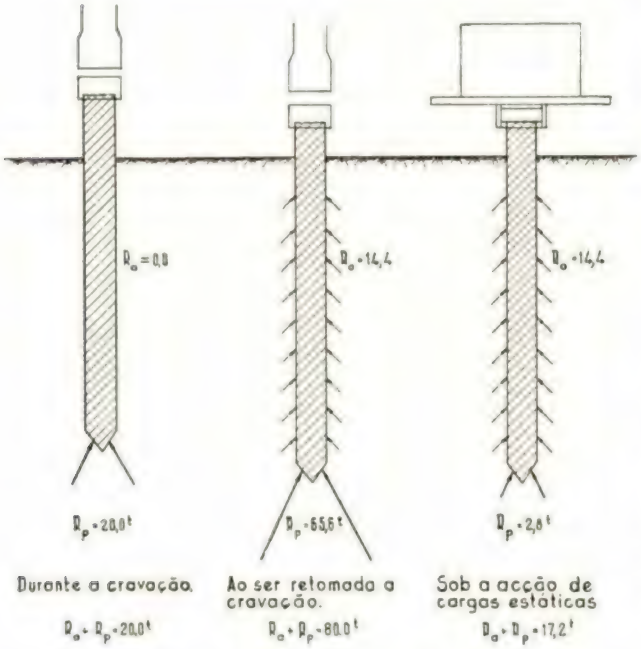


Fig. 115 — Resistências opostas à cravação por um terreno pouco permeável

Os valores indicados na fig. 115, com que se procura ilustrar os fenómenos acima descritos, são devidos a Krampf e vêm citados por Terzaghi (1929-a, pág. 286). Trata-se duma simples coincidência o facto de a resistência encontrada pela ponteira durante a cravação (20,0t) ter um valor próximo do da resistência verificada sob a acção de cargas estáticas (17,2t). Num caso como este a utilização duma fórmula de cravação teria fornecido resultados satisfatórios.

São do conhecimento geral os inconvenientes de suspender, a meio, a cravação duma estaca em terreno da classe II. Encontra-se geralmente grande dificuldade em tornar a por a estaca em movimento. Isto é especialmente de temer com bate-estacas modernos, que trabalham em elevado ritmo de pancadas mas em que é pequena a massa do pilão.

Pode, no entanto, verificar-se justamente o contrário: a resistência oposta pelo terreno à cravação diminuir depois de uma interrupção.

Esta diminuição é explicável nas seguintes condições:

Quando a estaca penetra no terreno comprime-o fortemente. Por esse facto, desenvolvem-se no terreno, junto à estaca, elevadas tensões. Se o terreno pertencer à classe II, tipo argila, essas tensões tenderão a diminuir com o tempo. Se, ao ser retomada a cravação, as tensões tiverem diminuido consideràvelmente, e a água existente nos poros do terreno não for em quantidade suficiente para entrar em pressão sob a acção da ponteira no terreno, o avanço da estaca passará a fazer-se em muito melhores condições.

Brennecke (1937, pág. 177) aconselha, por este facto, a que se proceda por degraus à cravação das estacas nas argilas.

De tudo o que fica dito se pode concluir que em terrenos da classe II, quer a cravação duma estaca seja feita dum modo contínuo, quer com interrupções, é impossível, a partir do comportamento durante a cravação, ajuizar do seu comportamento sob a acção de cargas estáticas.

Para ilustrar esta afirmação faremos algumas citações.

Morgan (1944) menciona uma obra, na China, cujas estacas se enterravam sob o peso do pilão, sem necessidade de serem cravadas. Passado um mês, essas mesmas estacas, em grupos de quatro, revelaram-se capazes de suportar cargas de 45 toneladas.

Nos «Procedings A. S. C. E.», Nov.º 1941, nas discussões sobre fórmulas de cravação, também foram apresentados casos semelhantes.

Outras vezes, porém, tem-se verificado justamente o contrário: a estaca opor grande resistência à cravação, não estando capaz, no entanto, de suportar cargas estáticas.

Terzaghi (1929-a, pág. 387) relata que estacas de madeira cravadas numa areia muito fina, misturada com pó proveniente da erosão de conchas, na ilha de Galveston, ofereciam tal resistência à cravação que a sua cabeça se desfazia sob a acção do pilão. Mais tarde verificou-se que algumas dessas

estacas assentavam várias polegadas sob a acção duma carga estática de 15 toneladas.

Stern (1908, pág. 16), citando Krapf (Eng. News-Rec. 1888, pág. 516) dá notícia dumas estacas que era pràticamente impossível cravar no lodo do rio Hudson, por toda a energia da cravação se perder em vibrações do terreno. Da observação dos avanços da estaca poder-se-ia ter concluído, erradamente, que elas se encontravam firmemente cravadas no solo. Estas estacas puderam ser afundadas, muito simplesmente, fazendo actuar sobre elas parte do peso de um batelão.

52 — Fórmulas de cravação

As fórmulas de cravação estabelecem relações entre grandezas medidas durante a cravação e a carga estática capaz de provocar o afundamento da estaca no terreno.

Para os terrenos da classe II (argilas) a resistência ao afundamento lento, que é a que interessa conhecer para a utilização da estaca, tanto pode ser superior como inferior à resistência à penetração rápida, e, além disso, como vimos, pode variar de um modo muito considerável com o tempo.

Antigamente, quando estes fenómenos ainda não estavam suficientemente estudados, as fórmulas de cravação eram consideradas um processo absolutamente seguro para a determinação da capacidade de carga das estacas.

O seu prestígio chegou ao ponto de ser considerada como vantagem das estacas cravadas a possibilidade de, para elas, a carga de serviço poder ser avaliada pelo emprego de fórmulas de cravação.

Já, porém, no princípio deste século, o aparecimento de aparelhagem de cravação em que esta se fazia com grande rapidez, mantendo a estaca permanentemente em vibração, tinha permitido verificar que as fórmulas de cravação nem sempre davam resultados de confiança.

Depois dos mais recentes estudos sobre os terrenos que só lentamente retomam o seu equilíbrio, o emprego das fórmulas de cravação encontra-se limitado às areias, em que tal fenómeno se não verifica.

As fórmulas de cravação continuam a ter, apesar de tudo, ainda hoje, quem as prefira, em condições particulares, aos próprios ensaios directos de carga.

É muito grande a variedade de fórmulas existentes. Quase todas elas dão boas indicações para as condições de trabalho em que foram estabelecidas. Podem falhar, no entanto, quando empregadas em condições diferentes.

Além dos referidos no parágrafo 51, são muitos ainda os factores que variam de cravação para cravação e que podem falsear os resultados indicados por qualquer fórmula, desde que, como quase sempre sucede, não tenham sido tomados na devida conta. Podem citar-se, entre outros, os seguintes: tipo de pilão e sua eficiência; secção da estaca e seu comprimento; presença de capacete que proteja a cabeça da estaca; tipo deste e material que o constitua; estado em que se encontre a cabeça da estaca; atritos nas guias e noutras peças; amachucamentos que se produzam; vibrações provocadas na estaca ou no bate-estacas e que absorvam grande parte da energia do pilão.

Visto as influências de todos estes factores serem difíceis de avaliar pelo cálculo, é natural que nunca se venha a estabelecer uma fórmula de emprego absolutamente geral.

Uma fórmula é tanto melhor quanto mais experimentada tenha sido nas condições em que se pretenda empregar. É esta a razão por que existem tantas fórmulas de uso limitado a regiões, por vezes até estabelecidas para obras particulares, calorosamente defendidas por alguns partidários. Deve evitar-se o emprego dessas fórmulas em condições diferentes daquelas para que foram estabelecidas.

A fórmula mais antiga, e talvez a de uso mais generalizado na Europa, é a chamada fórmula dos holandeses

$$R = \frac{Q^2 h}{e\,(Q+p)} \qquad (1)$$

em que:

R = resistência oposta pela estaca à penetração rápida no terreno

Q = peso do pilão

h = altura de queda do pilão
e = avanço da estaca por pancada (vulgarmente designado por *nega*)
p = peso da estaca (incluindo capacete se o houver).

Na América, é, desde há muito, usada quase exclusivamente, apesar das grandes críticas a que tem sido sujeita, a fórmula do «Enginneering News»:

$$R = \frac{Qh}{e + c} \qquad (2)$$

em que as letras têm o mesmo significado que na fórmula anterior e c é uma constante dependente das condições em que for feita a cravação e expressa na mesma unidade que e e h. No sistema métrico pode adoptar-se:

c = 2,5 cm para pilões de queda livre
c = 0,25 cm para bate-estacas a vapor

Esta fórmula foi estabelecida no tempo em que apenas existiam estacas de madeira e pilões que trabalhavam devagar, caindo de grande altura.

Uma fórmula muito empregada na Europa, e que vem mencionada em quase todos os manuais, é a de Brix

$$R = \frac{Q^2 ph}{(Q + p)^2 e} \qquad (3)$$

Muitas outras fórmulas existem, fruto de deduções, mais ou menos legítimas, da teoria do choque.

Noë e Troch (1920) apresentam no seu livro uma colecção muito completa de fórmulas de cravação.

Ultimamente, em Maio de 1941, a comissão encarregada pela *Am. Soc. Civ. Eng.* do estudo da capacidade de carga de estacas propôs uma interessante fórmula, que julgamos devida a Crandall, deduzida da teoria do choque, em que a determinação dos diversos factores que influem na cravação e dificultavam o emprego de outras fórmulas racionais, era substituida por uma única determinação, feita na própria ocasião da cravação.

Visto o emprego dessa fórmula nos parecer muito de aconselhar nos terrenos em que tenha significado a aplicação de fórmulas de cravação, apresentamos aqui a sua dedução.

O problema da avaliação das cargas a partir do comportamento da estaca durante a cravação é um problema de transformação de energia.

No momento do choque o pilão dispõe da energia

$$\mu Qh \qquad (4)$$

em que μ é o coeficiente da eficiência do pilão: 0,75 para pilões de queda livre e 0,9 para pilões a vapor [1].

A energia perdida a deformar elàsticamente o solo, a estaca, etc., é:

$$R\,(c + c_1 + c_2) = Rk$$

sendo:

$2c$ = deformação elástica do capacete

$2c_1$ = deformação elástica da estaca ao ser cravada

$2c_2$ = deformação reversível do terreno e de outros elementos

$2k$ = altura que o pilão sobe depois de dada a pancada.

A energia perdida no choque, conforme a teoria de choque, é

$$\mu Qh \frac{p\,(1 - n^2)}{Q + p} \qquad (6)$$

em que n é o coeficiente de restituição, que varia entre 0,3 (pilão de aço batendo sobre uma estaca de betão) e 0,25 (pilão fundido sobre estaca de madeira em bom estado) e pode descer a 0,0 para estacas com a cabeça deteriorada.

[1] Não sabemos por que razão, a Comissão da A.S.C.E. não indica o valor deste coeficiente para martelos de duplo efeito.

A equação geral será pois:

$$Re = \mu\, Qh - \mu\, Qh \frac{p\,(1 - n^2)}{Q + p} - Rk \text{ (1)} \qquad (7)$$

A esta equação pode dar-se a fórma:

$$h = \frac{Re + Rk}{\mu\, Q} \cdot \frac{Q + p}{Q + n^2\, p} \qquad (8)$$

É evidente que, para cada caso particular da cravação, haverá uma altura mínima de queda do pilão capaz de pôr a estaca em movimento. Toda a energia do pilão caindo dessa altura, que designaremos por h_0, será absorvida em deformações da estaca, do capacete, das guias, etc.; de modo que para essa altura de queda será $e = 0$.

Nessas condições a equação (8) tomará a forma

$$h_0 = \frac{Rk}{\mu\, Q} \cdot \frac{Q + p}{Q + n^2\, p}\,; \qquad (9)$$

combinando (8) e (9) tem-se

$$h = \frac{Re}{\mu Q} \cdot \frac{Q + p}{Q + n^2\, p} + h_0 \qquad (10)$$

que podemos escrever sob a forma

$$R = \frac{\mu\, Q\,(h - h_0)}{e} \cdot \frac{Q + n^2\, p}{Q + p} \qquad (11)$$

Como a acção do pilão, durante a cravação, sempre deteriora a cabeça das estacas de madeira e a madeira de enchimento dos capacetes usados para a cravação de estacas de betão, parece razoável, e é muito cómodo, admitir um coeficiente de restituição nulo.

O erro não é grande por n ser bastante inferior à unidade e entrar na fórmula elevado ao quadrado.

(1) Desta equação, por meio de simplificações, é possível deduzir todas as outras fórmulas de cravação (Am. Soc. Civ. Engrs. 1941, pág. 853). Não o faremos por nos parecer que não tem interesse a justificação teórica, mais ou menos forçada, das fórmulas que, na realidade, foram estabelecidas a partir de considerações diferentes.

A equação (11) tomará então a forma:

$$R = \frac{0.75\, Q\,(h - h_0)}{e} \cdot \frac{Q}{Q + p} \quad \text{para pilões de queda livre} \qquad (12)$$

$$R = \frac{0.90\, Q\,(h - h_0)}{e} \cdot \frac{Q}{Q + p} \quad \text{para pilões a vapor de simples efeito} \qquad (13)$$

A determinação de h_0 deve ser repetida com frequência, pois, além de variar com o peso do pilão, seu tipo e eficiência, dimensões da estaca, etc., varia também com o estado das guias e a elasticidade do terreno, factores estes que se não mantêm constantes durante a cravação.

Em vez da determinação directa de h_0, fazendo variar a altura de queda do pilão até conseguir determinar a maior altura que não provoque avanço da estaca, é recomendada, no relatório da comissão da A. S. C. E., a determinação indirecta.

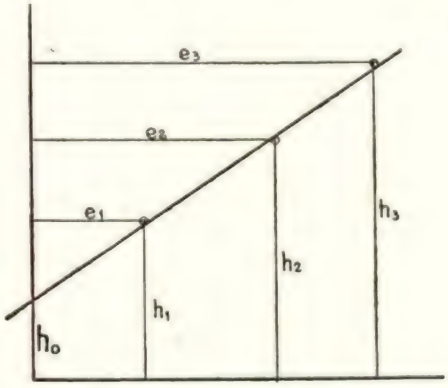


Fig. 116 — Determinação gráfica da altura h_0

Para essa determinação medem-se os avanços e da estaca (negas) para, pelo menos, três diferentes alturas h de queda.

Representa-se depois gràficamente os resultados das medidas, marcando em abcissas os avanços e em ordenadas as alturas de queda do pilão. A intersecção com os eixos dos hh da recta que unir esses pontos dá o valor de h_0 (fig. 116).

Se os 3 pontos não estiverem em linha recta deve repetir-se o ensaio.

O quadro I indica as cargas que, segundo a fórmula (13), podem ser aplicadas a vários tipos de estacas.

Sobre fórmulas de cravação leia-se Hiley (1930), Lossier (1929) e Pigeaud (1942).

QUADRO I

Cargas que as estacas podem suportar segundo a fórmula de cravação

$$C = \frac{0{,}9\, Q\,(h - h_0)}{\eta\, s} \cdot \frac{Q}{Q + p}$$

tendo suposto $h - h_0 = 70$ cm e o coeficiente de segurança $\eta = 3$.

Para os valores diferentes destes fazer a proporção, pois C varia linearmente com $(h - h_0)$ e com η.

Cargas expressas em toneladas.

Peso do pilão Q ton.	Avanço da estaca por pancada s mm	Estacas de madeira				Estacas de betão				Estacas metálicas			
		ø 20		ø 30		30 × 30		40 × 40		IP 24		IP 34	
		6m,0	10m,0	6m,0	15m,0	6m,0	12m,0	6m,0	15m,0	6m,0	12m,0	6m,0	15m,0
0,8	10	14	13	—	—	—	—	—	—	10	7,3	8,3	4,7
	5	28	26	—	—	—	—	—	—	20	15	17	9,5
	2	—	—	—	—	—	—	—	—	50	36	41	24
1,2	10	22	21	20	15	12	8,0	—	—	17	13	15	9
	5	—	—	39	29	24	16	—	—	35	26	30	18
	2	—	—	—	—	60	40	—	—	87	67	75	45
1,8	10	—	—	32	26	22	15	17	—	29	24	26	18
	5	—	—	—	51	44	30	34	—	58	48	52	36
	2	—	—	—	—	—	—	84	—	146	120	130	89
2,7	20	—	—	25	22	19	14	15	9	24	20	22	6
	10	—	—	50	43	38	29	31	18	47	48	43	32
	5	—	—	—	—	—	58	61	36	95	82	87	64
	2	—	—	—	—	—	—	—	90	—	—	217	160
4,0	10	—	—	—	—	64	51	53	34	—	—	70	56
	5	—	—	—	—	—	—	106	69	—	—	140	112
Peso da estaca p ton.		0,15	0,25	0,34	0,85	1,30	2,60	2,30	5,75	0,53	1,05	0,82	2,05
Limite de carga para as tensões de serviço: $R_m = 80$ kg/cm² $R_b = 60$ kg/cm² $R_a = 1400$ kg/cm²		25,0	25,0	56,5	56,5	62,2	62,2	111,0	111,0	155,0	155,0	243,0	243,0

53 — Coeficiente de segurança para aplicação de fórmulas de cravação

Todas as fórmulas de cravação apresentadas no parágrafo anterior servem para determinar o valor de R: resistência que a estaca opõe, no momento da cravação, ao afundamento rápido no terreno.

Para os terrenos de classe I (tipo areia), em que é legítimo, como vimos, o emprego das fórmulas de cravação para a previsão das cargas estáticas, esse valor deve ser igual à resistência à penetração lenta.

É usual dividir, nessas condições, o valor de R, dado pelas fórmulas, por um coeficiente compreendido entre os afastados valores de 2 e 10, consoante o conhecimento que se tenha do local, modo de actuar das cargas, importância da obra, etc.

Quando se utilizam as fórmulas (12) e (13), em que se encontram eliminadas muitas das causas de erro das outras fórmulas, é razoável adoptar um coeficiente de segurança baixo. A comissão da A. S. C. E., indica, para essas fórmulas, o coeficiente de segurança 3.

Correia de Araújo (1942, pág. 243), indica o coeficiente de segurança 6 para a fórmula dos holandeses e 8 para a de Brix. Estes valores, que são os mais adoptados, parecem-nos exagerados, desde que haja o cuidado de apenas aplicar as fórmulas nos terrenos em que seja legítimo o seu emprego.

Para os terrenos que não retomem instantâneamente o seu equilíbrio, não há que escolher coeficientes altos, mas sim que pôr de parte a utilização das fórmulas de cravação.

Para saber se é razoável aplicar a fórmula de cravação num dado terreno, o processo mais eficaz é efectuar uma cravação de ensaio, suspendê-la, e retomá-la, horas ou dias depois. Se a cravação se continuar nas condições em que tinha sido suspensa é legítimo o emprego de fórmulas de cravação; caso contrário, o seu emprego deve ser posto de parte, e utilizado outro processo para avaliação da carga a aplicar à estaca.

Circunstâncias há, para as quais, em vez de adoptar um elevado coeficiente de segurança, que pode de nada servir, se deve antes procurar uma boa interpretação dos fenómenos verificados. Como exemplo citaremos o caso, bastante frequente, de se cravar uma estaca através dum terreno em que sejam de esperar assentamentos.

Sobre a capacidade de carga nestas condições, veja-se adiante o parágrafo 62.

54 — Emprego das fórmulas de cravação com estacas inclinadas

Quando a uma estaca inclinada se queira aplicar qualquer fórmula de cravação, é necessário substituir o peso do pilão Q por um peso Q', convencional, em que se tem em conta o facto de o pilão descarregar sobre as guias e de ter de vencer o atrito para sobre estas se mover (fig. 117).

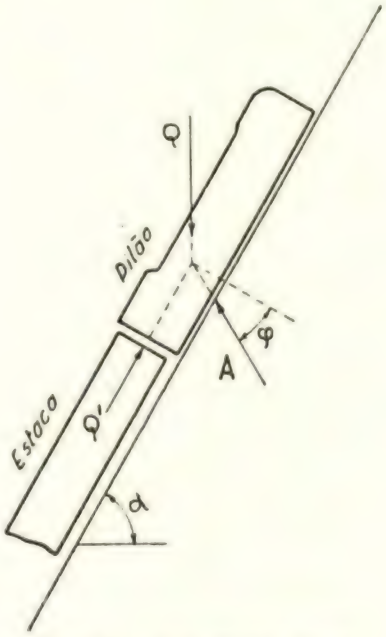


Fig. 117 — Cravação de estacas inclinadas

Será

$$Q' = Q\,(sen\ \alpha - tg\ \varphi\ cos\ \alpha)$$

Segundo Chellis (1941, pág. 25) é razoável tomar para coeficiente de atrito, entre pilão e guias, o valor

$$tg\ \varphi = 0{,}1$$

55 — Fórmulas estáticas

As fórmulas estáticas, como também as de cravação, servem para avaliar a grandeza da carga que provoca o afundamento da estaca no terreno.

Para essa avaliação, nas fórmulas estáticas, em vez de medições feitas durante a cravação, utilizam-se valores relacionados com as características do terreno e da estaca.

As fórmulas estáticas são de emprego bastante recente.

Duas circunstâncias levaram ao seu estabelecimento.

Uma, já atrás referida, foi a impossibilidade de se estabelecer para muitos terrenos uma relação entre a resistência à penetração rápida e a resistência à penetração lenta das estacas no terreno.

Outra, igualmente decisiva, foi o aparecimento de tipos de estacas que não eram cravadas e às quais, por esse motivo, se não podiam aplicar as fórmulas de cravação.

Acontece porém que, no estado actual da ciência das fundações, apesar de importantes trabalhos de muitos investigadores, pouco se sabe àcerca das forças que mantêm as estacas na sua posição. Daí a dificuldade de estabelecer fórmulas estáticas.

Hoje admite-se, como já dissemos no parágrafo 51, que essas forças são:

1) Atrito entre a superfície da estaca e o terreno (R_a) — pressupõe a existência duma pressão exercida pelo terreno sobre a superfície da estaca.

2) Resistência que o terreno opõe a ser deslocado sob a ponteira (R_p) — muito variável com os terrenos e com o seu estado.

Acerca destas forças, seus modos de actuar e variação com a profundidade, têm surgido grande diversidade de opiniões.

Stern (1908) fala ainda numa terceira força: a adesão entre a superfície da estaca e o terreno, independente da pressão que este exerce sobre a estaca.

Para dificultar o problema há a acrescentar a circunstância de a cravação, assim como o apiloamento nas estacas betonadas no solo com recuperação do molde, provocar alterações nos terrenos, justamente na vizinhança das estacas, cujos efeitos ainda se não encontram estudados.

Quando apareceram as primeiras fórmulas estáticas, bastante complicadas todas elas, o seu prestígio chegou a ser tal que alguns autores puseram completamente de parte as fórmulas de cravação.

Por exemplo, Breneecke Lohomeyer, na 4.ª Edição da sua obra «Der Grunbau» publicada em 1927, nem sequer transcreve uma única destas fórmulas. Apenas no final dum capítulo admite que ensaios de cravação possam servir para completar o conhecimento do terreno e assim, indirectamente, ser aproveitados para a fixação das cargas a aplicar às estacas.

As fórmulas estáticas continuam hoje a ser estudadas. É grande a variedade de tipos apresentados, tendo todos eles sido alvo de variadas críticas, mais ou menos justificadas.

Por nos parecer que é de esperar que, em breve, graças aos progressos da mecânica dos solos, possa ser esclarecido o problema da determinação das cargas a aplicar às estacas a partir do conhecimento do terreno, não nos deteremos muito com a apresentação do que hoje se pensa sobre o assunto, nem com a grande variedade de fórmulas actualmente empregadas.

Diremos, apenas, algumas palavras sobre o atrito lateral da estaca e sobre a resistência encontrada pela ponteira à penetração no solo.

Antes de estudar estas forças queremos fazer notar que não sabemos em que medida será razoável adicionar simplesmente as suas grandezas, com o fim de se obter a grandeza total da carga que produz o afundamento.

Só seria legítimo contar, simultâneamente, com os máximos valores da resistência da ponteira e do atrito lateral se eles se verificassem para um mesmo valor de afundamento da estaca ao ser carregada. Desde que tal não aconteça, cada uma dessas resistências será vencida em separado (Scheidig e Kogler, 1941, pág. 243).

Na quase totalidade das fórmulas estáticas admite-se, no entanto, que a carga que

provoca o afundamento duma estaca no terreno seja igual à soma destas duas forças

$$R = R_a + R_p$$

Julgamos mais seguro contar apenas um dos termos referidos; se a estaca trabalhar de ponta contar apenas com a resistência que o terreno opõe à sua penetração; se a estaca for flutuante contar apenas com o atrito lateral.

56 — Atrito lateral

A determinação do valor do chamado atrito lateral das estacas tem sido alvo de inúmeras investigações.

A sua determinação experimental, na obra ou no laboratório, pode ser feita por qualquer dos processos indicados na fig. 118.

Procedendo de modo inverso do indicado em primeiro lugar na figura (cravando uma estaca dentro do buraco aberto por outra de maior diâmetro), também se pode determinar a resistência encontrada pela ponteira.

Os restantes dispositivos prestam-se, igualmente, à determinação da resistência da ponteira e à do atrito lateral.

A prática, bastante divulgada, da determinação do atrito lateral pelo arranque da estaca, admitindo-se que o atrito lateral tem o mesmo valor quer a estaca seja comprimida quer seja tendida, tem sido sujeita às mais variadas críticas.

Não citaremos aqui os autores que, teòricamente, têm abordado o assunto e chegado a conclusões opostas. Experiências realizadas em diversas circunstâncias também têm dado os resultados mais contraditórios.

Loos (1937) faz referência a um caso em que o atrito medido à compressão foi 4 a 7 vezes maior do que o determinado a tracção.

Stern (1908, pág. 17), por sua vez, menciona um caso em que se verificou ser maior a resistência à tracção do que a medida à compressão.

Dos ensaios efectuados por Boonstra, e apresentados ao 1.º Congresso da Mecânica dos Solos, parece poder concluir-se haver igualdade entre o atrito lateral à tracção e à compressão (Mayer 1939, pág. 109).

Esta diversidade de resultados de ensaios julgâmo-la motivada por vários factores ainda não suficientemente estudados.

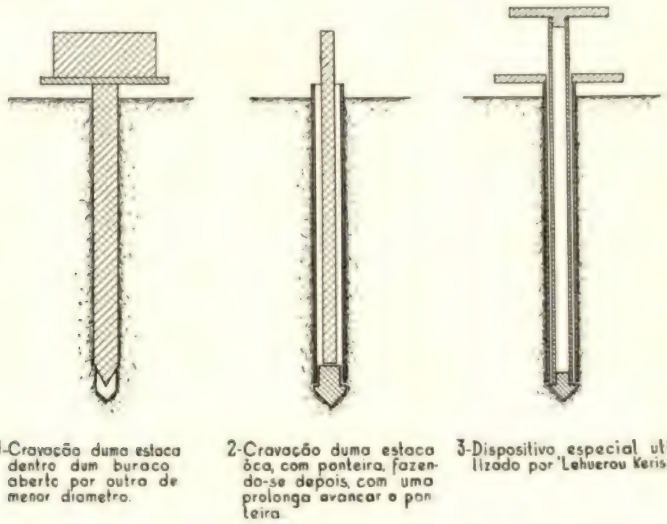


Fig. 118 — Determinação do atrito lateral por meio de ensaios da carga, eliminando a resistência da ponteira

A variação da grandeza do atrito lateral com a profundidade também tem sido objecto de muitas controvérsias.

Diferentes leis têm sido apresentadas para essa variação. Parecia razoável que a força de atrito crescesse com a profundidade. Diversas experiências têm revelado, porém, que o atrito lateral total duma estaca é sensìvelmente proporcional ao seu comprimento,

o que faz crer que a pressão do terreno sobre a estaca é independente da profundidade.

Este facto pode, de algum modo, ser explicado se se admitir que a pressão que o terreno exerce sobre a estaca, e que motiva o atrito, é uma consequência da cravação, e não do impulso das terras, como se estabelece na maioria das expressões teóricas.

Os engenheiros da *Wang Poo Conservancy* verificaram em numerosas experiências, assim como outros experimentadores, a proporcionalidade entre a área da estaca e a sua capacidade de carga (Terzaghi 1939-b, pág. 34).

Hoje admite-se essa proporcionalidade, encontrando-se pràticamente postas de parte as fórmulas que davam o valor do atrito como função da profundidade.

O valor do atrito total pode, pois, calcular-se pela expressão muito simples:

$$R_a = S\,\mu$$

sendo:

R_a = atrito total
S = superfície de estaca em metros quadrados
μ = força de atrito por metro quadrado.

Para h_o deve, segundo Guidi, (1942, pág. 130) adoptar-se um valor superior a $5^m,00$. Claro que o valor de h_o varia com diversos factores. A maioria dos autores admite, por comodidade, que h_o é nulo.

Na figura 119 é indicada como distribuição real das pressões uma curva de forma ainda não determinada cujas abcissas, a partir de certa altura, crescem lentamente com a profundidade.

Acerca dos valores a atribuir à força de atrito por unidade de área (μ), também não há concordância entre os resultados observados e publicados pelos vários experimentadores.

O quadro II permite fazer ideia das disparidades observadas.

Os valores apresentados neste quadro foram certamente influenciados por tipos de estacas, processos de as afundar, terrenos onde se fizeram os ensaios, vizinhança de outras estacas, etc., etc. Daí o dificilmente poderem ser interpretados e utilizados por quem não conheça as condições em que foram feitas as suas determinações.

Nos números 5 de 1931 e 1 de 1934, do «Journal B. S C. E.», também são apresentados numerosos resultados de medições de atritos laterais.

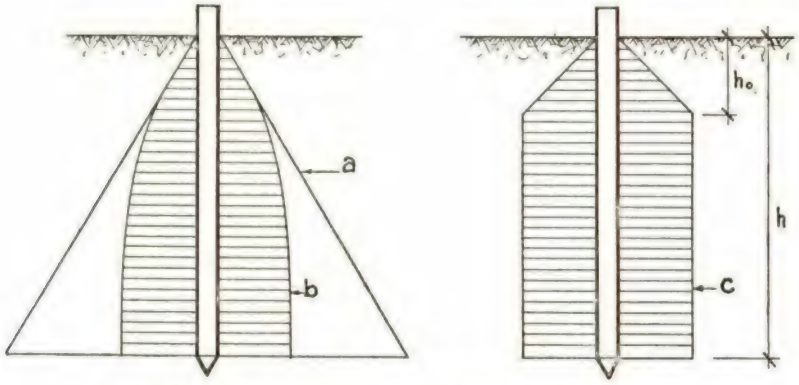


Fig. 119 — Pressões exercidas pelo solo sobre as estacas

a — distribuição teórica clássica
b — distribuição real
c — distribuição para efeitos de cálculo

Querendo ser um pouco mais preciso, e ter em conta que μ é certamente muito pequeno à superfície (fig. 119), pode empregar-se a expressão

$$R_a = S\,\mu\left(1 - \frac{h_o}{2h}\right)$$

No livro de Correia de Araújo (1942, Tabela XXV), vêm transcritos os valores indicados por Guidi, para o atrito lateral.

QUADRO II

Comparação entre os valores indicados por diferentes autores para o atrito lateral das estacas

Autor		Terrenos		
		Lodos	Argilas	Areias
Armand Mayer		0,7 a 0,9 tm/²	1,0 a 1,5 t/m²	2,0 a 2,5 t/m²
Scheidig (ensaios de tracção)		0,7	1,0 a 10,0	1,0 a 20,0
Krynine	madeira	0,0	1,6 a 2,7	1,6 a 2,7
	betão	0,0	3,2 a 6,5	3,2 a 6,5
	metálicas	0,0	2,0 a 4,2	2,0 a 4,2
Tschebotareff (citado por Jacoby e Davis)		0,7	até 7,0	3,0 a 10,0
Valores citados no Proc. A. S. C. E., Maio 1941		0,5	1,7 a 9,0	1,7 a 4,4
Guidi	Madeira	—	2,5	3,0
	betão rugoso	—	1,5	2,5
	betão liso	—	1,0	2,0
	Ferro, aço	—	1,5	2,5

Quando se procede à elaboração de um projecto de responsabilidade, em vez de utilizar valores indicados em livros, é indispensável proceder a ensaios directos.

Com o fim de facilitar aos leitores uma primeira comparação entre estacas de diferentes tipos e com diversas dimensões elaborámos o quadro III.

Ao elaborá-lo admitimos que os valores indicados por A. Mayer podiam ser utilizados directamente, e que aos indicados por Scheidig se devia aplicar o coeficiente de segurança 2. Admitimos também que o perímetro das estacas metálicas era apenas o perímetro do rectângulo circunscrito.

Para estacas moldadas no solo é natural que o atrito seja superior ao indicado no quadro. Como, porém, para essas estacas, pelos motivos atrás expostos, se deve contar com coeficientes de segurança superiores aos utilizados com estacas betonadas em estaleiro, pensamos que o quadro, numa primeira aproximação, tanto pode ser utilizado para um como para outro tipo de estacas.

Sempre que a transmissão de cargas ao solo se faça por pequenos grupos de estacas que resistam por atrito lateral, é usual dispo-las de modo que o perímetro exterior

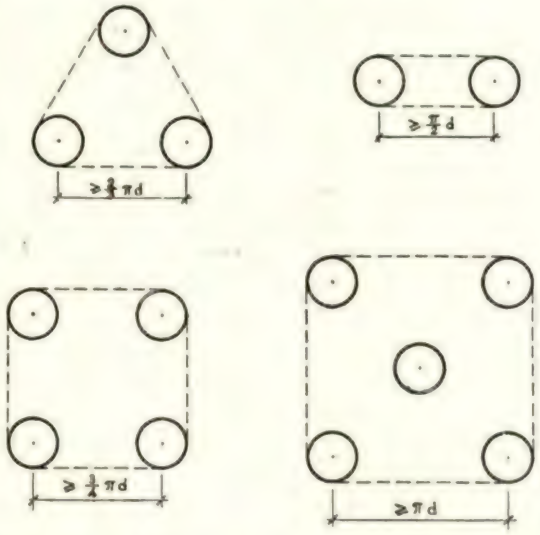


Fig. 120 — Afastamentos entre estacas que asseguram para o grupo um perímetro igual ou superior ao das estacas

do grupo seja superior, ou pelo menos igual, ao total das estacas isoladas. Deste modo se pretende tirar o maior partido do material

QUADRO III

Cargas que as estacas podem suportar por atrito lateral, segundo a fórmula

$$C = \frac{\mu S}{n}$$

Junto à natureza das estacas indicam-se as suas secções e comprimentos.
Cargas expressas em toneladas.

Autor	Tipo de terreno	Atrito lateral μ t/m²	Estacas de madeira				Estacas de betão				Estacas metálicas			
			ø 20		ø 30		30×30		40×40		IP 24		IP 34	
			6m,0	10m,0	6m,0	15m,0	6m,0	12m,0	6m,0	15m,0	6m,0	12m,0	6m,0	15m,0
Segundo A. Mayer com $n = 1$	lodo	0,7 0,9	2,6 3,4	4,4 5,7	4,0 5,1	7,9 10	5,0 6,5	10 13	6,7 8,6	17 22	4,0 5,1	8,0 10	5,2 6,7	13 17
	argila	1,0 1,5	3,8 5,6	6,3 9,4	5,7 8,5	11 17	7,2 11	14 22	10 14	24 36	5,7 8,5	11 17	7,5 11	19 28
	areia	2,0 2,5	7,6 9,4	13 16	11 14	23 28	14 18	29 36	19 24	48 60	11 14	23 28	15 19	37 47
Segundo Scheidig com $n = 2$	lodo	0,7	1,3	2,2	2,2	4,0	2,5	5,0	3,4	8,4	2,0	4,0	2,6	6,6
	argila muito plástica	1,0 2,0	1,9 3,8	3,1 6,3	2,8 5,7	5,6 11	3,6 7,2	7,2 14	4,8 10	12 24	2,8 5,7	5,7 11	3,7 7,5	9,4 19
	argila plástica	3,4 4,0	5,7 7,5	9,4 13	8,5 11	17 23	11 14	21 29	15 19	36 48	7,5 11	17 23	11 15	28 37
	argila rija	6,0 10,0	11 19	19 31	17 28	34 56	22 36	43 72	29 48	72 120	17 28	34 57	22 37	56 94
	areia	10,0 12,0	19 23	31 38	28 34	56 58	36 43	71 86	48 58	120 144	28 34	57 68	37 45	94 112
Superfície da estaca em m²			3,8	6,2	5,7	11,3	7,2	14,4	9,6	2,4	5,7	11,4	7,25	18,7
Limite de carga para as tensões de serviço $R_m = 80$ Kg/cm² $R_b = 60$ Kg/cm² $R_a = 1400$ Kg/cm²			25,0	25,0	56.5	56,5	62,2	62,2	111	111	155	155	243	243

das estacas, sem haver perigo de o grupo se afundar conjuntamente com o terreno que se encontre entre as estacas.

Satisfaz-se essa condição dispondo as estacas segundo os modos indicados na fig. 120.

Sobre o estudo do atrito lateral das estacas vejam-se Krynine (1941), Santarella (1936), Schuette (1940).

57 — Resistência da ponteira

A resistência que o terreno opõe a ser deslocado ou comprimido pela ponteira é algumas vezes a principal contribuição para a capacidade de carga da estaca.

Convém então tirar dessa resistência o maior partido possível.

Para tal deve fazer-se com que a estaca tenha a sua extremidade numa camada resistente.

Em Xangai foi verificado, pelos engenheiros da *Wang Poo Conservancy District,* a possibilidade de reduzir os assentamentos fazendo terminar as estacas junto à face superior das camadas de areia que, de quando em quando, se encontram no sub-solo daquela cidade (Terzaghi 1939-b).

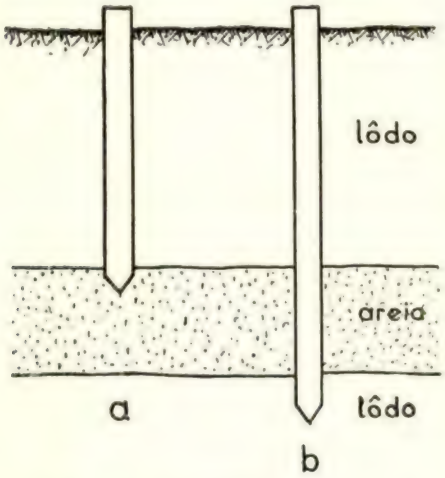


Fig. 121 — Exemplo de condições em que uma estaca curta pode suportar maior carga do que uma estaca comprida

Tal facto, no caso da figura 121, corresponde a a estaca *a*, embora mais curta, poder suportar maior carga do que a estaca *b*.

Acerca do valor da resistência da ponteira, e da sua variação com a profundidade, há grande diversidade de opiniões.

Pelo emprego de fórmulas diferentes chega-se a resultados variando entre limites afastadíssimos.

A fórmula mais conhecida é a de Dorr que dá:

$$R_p = \gamma\, l\, A\, tg^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \qquad (1)$$

em que:

R_p = resistência encontrada pela ponteira da estaca
γ = peso específico do terreno
l = comprimento da estaca
A = área da secção da estaca
φ = ângulo de atrito interno do terreno.

Os valores dados por esta fórmula são geralmente considerados como baixos, e a sua adopção só se justifica por o outro termo da fórmula de Dorr, o referente ao atrito lateral, que não transcrevemos aqui, dar valores exagerados.

Para o cálculo da resistência da ponteira parece-nos mais de aconselhar, em vez da fórmula de Dorr, o emprego duma das fórmulas deduzidas para o estudo das fundações em geral, dando a carga por centímetro quadrado que a uma dada profundidade pode ser aplicada ao terreno.

Assim, por exemplo, a fórmula de Caquot, a qual indica o valor da pressão que provoca o escorregamento do maciço terroso sob uma fundação:

$$r = \gamma z\, tg^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi tg\varphi} +$$

$$+ C\, cotg\, \varphi \left[tg^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi tg\varphi} - 1\right]$$

Fazendo

$$tg^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\pi tg\varphi} = K$$

teremos

$$r = \gamma z K + C\, cotg\, \varphi\, [K - 1] \qquad (2)$$

em que:

r = carga unitária que à profundidade z pode ser aplicada ao terreno
φ = ângulo de atrito interno do terreno
γ = peso específico do terreno
z = cota da fundação abaixo da superfície do terreno; neste caso a cota da ponteira da estaca
C = coesão do terreno
K = coeficiente dependente apenas do ângulo de atrito interno.

Para substituição nesta fórmula indicamos no quadro IV os valores de K e de cotg γ.

A fórmula toma uma forma muito simples no caso do terreno ser desprovido de coesão:

$$R = \gamma z K \qquad (3)$$

QUADRO IV

φ	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
K	2,5	4	6	11	18	33	63	130	300
$cotg\ \varphi$	6	4	3	2	2	1,4	1,2	1,0	0,8

É usual empregar a fórmula de Caquot, no cálculo de fundações planas, com um coeficiente de segurança entre 4 e 6.

Parece-nos razoável que, quando se trata de estacas, se reduza o coeficiente de segurança, desde que se não conte, simultaneamente, com o atrito lateral.

Acerca de outras fórmulas, que também podem ser empregadas para o mesmo fim, consulte-se Araújo (1942).

Exemplo de aplicação: Que carga pode suportar de ponta uma estaca com o diâmetro $0,^{m}50$ na base, enterrada $10^{m},00$ em areia, com o ângulo de atrito interno de 30°?

Da tabela tiraremos:

$$K = 18$$

Considerando 1,9 t/m³ como peso específico do terreno, temos que:

$$r = \gamma z K = 1{,}9\ t/m^3 \times 10{,}0\ m \times 18 = 341{,}0\ t/m^2$$

Se adoptarmos o coeficiente de segurança igual a 2, a carga de serviço a aplicar à estaca será:

$$C = \frac{\pi d^2}{4}\ \frac{r}{n} = \frac{\pi\, 0{,}50^2}{4}\ \frac{344}{2} = 34t$$

(*Continua*)

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

A pressão dos terrenos em lavra de minas

Introdução geral ao seu estudo

Pelo Eng. FARINAS DE ALMEIDA

Porto, 1944 — Preço 80$00

Constitue este trabalho dissertação para concurso a professor catedrático da Secção de Minas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Devia a notícia deste livro já ter sido dada no número de Abril desta revista, não nos foi, contudo, possível fazê-lo porque só agora pudemos terminar a sua leitura.

Assim, além de procurarmos dar uma ideia do que os futuros leitores poderão obter desta obra, já diremos do seu acolhimento neste Instituto.

O nome do A., bem conhecido através das suas lições de lavra de minas na F. de E. do Porto, era uma recomendação ao trabalho que, de facto, corresponde ao que se esperava do Prof. Eng. Farinas de Almeida. Todavia, o A. é também um prático — é, desde longa data, director técnico das Minas de Carvão de S. Pedro da Cova — e já a este título não nos satisfez tão completamente — o aspecto prático do assunto, tão minuciosamente estudado sob o ponto de vista teórico, não têm o desenvolvimento correspondente.

É esta falta que sentiram os leitores desta Escola e que esperavam do A., dadas as suas qualidades de Professor e Técnico, equilíbrio entre a teoria e a prática.

Este desiquilíbrio está, contudo, explicado no título a que a obra é apresentada — dissertação — e pelo próprio A., no prefácio, que, reconhecendo-o, promete, em futuro, completar o trabalho sob este aspecto. É essa futura edicão que os leitores da actual ficam desejando, já sem os limites impostos para uma dissertação mas ùnicamente como elemento de trabalho, que com certeza corresponderá ao nível desta primeira parte, agora publicada.

Não se depreenda do que acabamos de dizer que neste livro não encontrem os técnicos elementos de informação. Nele ficam expostos os princípios em que se baseará a interpretação dos factos reais.

No capítulo II o A. expõe, desde um ponto de vista crítico, as teorías consagradas sôbre os aluimentos e os maciços de protecção na Lavra de Minas. O capítulo III não só será útil aos engenheiros de minas mas, ainda, aos engenheiros civis que tratem de problemas de fundação; é o capítulo dedicado às propriedades mecânicas das rochas, capítulo que permitirá tirar desde já ensinamentos práticos.

Depois, em novo capítulo, o A. expõe as suas próprias ideías sobre uma teoria interpretativa geral. Colocando-se num ponto de vista mineiro — estuda e procura interpretar o comportamente dos terrenos atendendo a que a obra de sustimento mineiro tem carácter temporário mais ou menos curto. Acaba o livro por um capítulo de conclusões cuja leitura será útil a todos os engenheiros que tenham de se enfrentar com problemas de comportamento mecânico em torrenos sedimentares.

Congratula-se a *Técnica* com este trabalho, que vem enriquecer a escassa bibliografia mineira portuguesa, e faz votos para que não se faça esperar uma segunda edição já completada com o lado prático para o que A. tem sem dúvida os melhores elementos fornecidos por uma larga actividade mineira.

D. T.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Não periódicas

Receiving Tube Manual — R. C. A.

Tubes «Miniwat» Philips.

Relatório da Administração Geral do Porto de Lisboa — Vol. I e II, 1944.

Boletim Cultural da Guiné Portuguesa.

Periódicas

BRASIL

ENGENHARIA — Janeiro e Fevereiro de 1946.

ESPANHA

CEMENTO — Novembro de 1945.

FRANÇA

MARCHÉS COLONIEUX — Maio e Junho de 1946.

L'ÉCONOMIE — Maio e Junho de 1946.

BULLETIN ANALYTIQUE DE CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE — Março de 1946.

SUÍÇA

SUÍÇA TÉCNICA — Dezembro de 1945.

REVUE SULZER — N.os 2, 3 e 4 de 1944, 3 e 1 de 1945.

BULLETIN SÉCHERON — N.os 15 e 16.

PORTUGAL

AGRONOMIA LUSITANA — N.º 1, 1946.

AQUI E ALÉM — N.º 4, 1946

ANAIS DO CLUB MILITAR NAVAL — Janeiro e Fevereiro de 1946.

ANÁLISE — N.º 2, 1946.

BOLETIM DA JUNTA NACIONAL DE CORTIÇA — Janeiro de 1946.

BOLETIM GERAL DAS COLÓNIAS — Março de 1946.

BOLETIM DA SOCIEDADE DE GEOGRAFIA DE LISBOA — Março e Abril de 1946.

BROTERIA — Junho de 1946.

ENGENHARIA — N.os 2 e 3.

ESTUDOS — Maio de 1946.

GIL VICENTE — Março e Abril de 1946.

GAZETA MATEMÁTICA — N.os 1404 e 1405.

INDÚSTRIA PORTUGUESA — Março de 1946.

REVISTA DE ARTILHARIA — Junho de 1946.

SEARA NOVA — N.os 982 a 985.

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA, DOS ALUNOS DO I. S. T.

DIRECTOR: ANTÓNIO BUSTORFF.

ADMINISTRADOR: FERNANDO MANZANARES ABECASSIS.

BIBLIOTECÁRIO: FERNANDO JÂCOME DE CASTRO.

CORPO REDACTORIAL: JOÃO BARATA GALVÃO. HENRIQUE MARQES PEREIRA. EDUARDO CANSADO DE CARVALHO. JOSÉ PAIS GROMICHO. ALFREDO NOBRE DA COSTA.

Propriedade e Edição da A. E. I. S. T.

519 Topografia

C. D. 526.96 : 519.25

Erros e compensações no apoio dos levantamentos topográficos — *Eng.º Carvalho Xerez.*
Técnica, ano XIX, n.º 144, pág. 673, Fevereiro de 1944.

666 Betão armado

C. D. 693.55

Cálculo de suportes ao varejamento — *Pelo 6.º ano de Engenharia Civil.*
Técnica, ano XIX, n.º 144, pág. 721, Fevereiro de 1944

C. D. 666.94

Acção do cloreto de cálcio sobre a presa e o endurecimento das argamassas do cimento Portland — *Eng.º Antônio Teixeira Lopes.*
Técnica, ano XIX, n.º 143, pág. 621, Janeiro de 1944.

C. D. 693.55

Alterações ao Regulamento do Betão Armado — *Eng.º D. M. Vieira Barbosa.*

Algumas observações a seu respeito.

Técnica, ano XIX, n.º 143, pág. 633, Janeiro de 1944.

C. D. 666.94

Progressos de la investigación del cemento en 1942 — *Dr. C. R. Platzmann.*
Cemento-Hormigon, n.º 133, pág. 89, Abril de 1945; n.º 135, pág. 137, Junho de 1945; n.º 136, pág. 169, Julho de 1945; n.º 137, pág. 190, Agosto de 1945; n.º 138, pág. 223, Setembro de 1945; n.º 140, pág. 271, Setembro de 1945.

C. D. 666.96

La fabricación de materiales de hormigón — *Eng.º Fernando Vilagut.*
Cemento-Hormigon, ano XIII, volume XI, n.º 140, pág. 282; n.º 138, pág. 218, Setembro de 1945; n.º 139, pág. 251, Outubro de 1945.

C. D. 693.55

Prontuario para el empleo de la madera en las construcciones de hormigón — *Eng.º Enrique Soler Fradera.*
Cemento-Hormigon, ano XIII, volume XI, n.º 140, pág. 277, Novembro de 1945.

621 Electrotecnia

C. D. 621.317.7

Notas sobre a instalação de um contador de Geiger e Müller — *Carlos Barradas da Silva.*
Técnica, ano XIX, n.º 142, pág. 584, Dezembro de 1943.

C. D. 621.332.3

Diversos sistemas de telefonia aplicada nas redes de distribuição eléctrica — *Eng.º E. Michez.*
Técnica, ano XIX, n.º 144, pág. 698, Fevereiro de 1944.

C. D. 621.33

Soixante ans de traction électrique — *Eng.º H. Werz (E. P. Z.)*
Bulletin Secheron, n.º 16-F, pág. 1, 1945.

C. D. 621.33

Les locomotives lype C_0 — C_0 de 3000 ch du Réseau national des chemins de fer espagnols — *Eng.º P. Gaibrois.*
Bulletin Secheron, n.º 16-F, pág. 28, 1945.

C. D. 621.33

Les automotrices à voie d'un métre et à courant monophasé 15.000 V, 16 $^2/_3$ pér/s, du chemin de fer Biére-Apples-Morges — *Eng.º H. Werz (E. P. Z.)*
Bulletin Secheron, n.º 16-F, pág. 39, 1945.

C. D. 621.33

Tracteurs à accumulateurs des Forces Motrices de l'Oberhasli — *Eng.º P. Gaibrois.*
Bulletin Secheron, n.º 16-F, pág. 44, 1945.

C. D. 621. 33

Motrices de tramway modernes et legéres — *Eng.º H. Werz (E. P. Z.)*
Bulletin Secheron, n.º 16-F, pág. 46, 1945.

621 Máquinas

C. D. 621.24

Calcul de l'ecoulement potencial d'un fluide dans une grille d'aubes — *Dr. W. Troupel.*
Sulzer, n.º 1, pág. 25, 1945.

MAQUINAS DA CASA WILLIAM ASQUITH LTD.

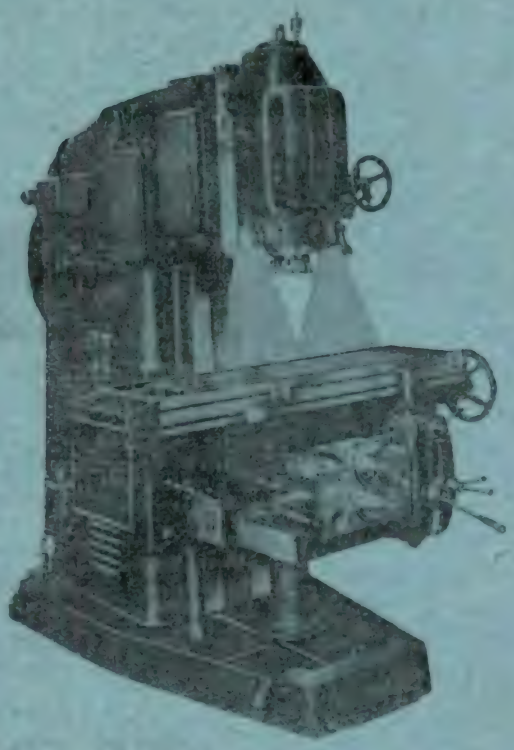
HALIFAX — INGLATERRA

Frezadora Horizontal 28″

Avanço longitudinal 28″
Tamanho da mesa, 4′1″ × 1′2″
Avanço transversal 8″
Distância máxima entre árvore e centro, 1′ 5/1 2″
Avanço vertical, 1′3/1/2″
Número de velocidades da árvore, 9
Número de rotações da árvore por minuto, 33 á 500 ou 49 á 750 ou 66 á 1.000
Número de avanços da mesa, 9
1″ á 18″ por minuto
Motor, cavalos, 6.
Avanço transversal da mesa. 66″ á 12″ por minuto
Avanço vertical da mesa. 33″ á 6″ por minuto
Peso aproximado, líquido, 2.650 kgs

Frezadora Vertical tipo «V»

Avanço longitudinal da mesa 28″
Tamanho da mesa 4′1″ × 1′2″
Avanço transversal da mesa 8″
Avanço vertical da mesa 1′3 1/2″
Avanços mecânicos, por minuto:
Longitudinal 8′4″
Transversal 5′6″
Vertical 2 9″
Número de velocidades da árvore 9
Número de rotações da árvore 33 a 500 ou 49 á 750 ou 66 á 1000 por minuto
Avanços da mesa 9
Avanços da mesa:
Longitudinal 1″ á 18″ por minuto
Transversal 66″ á 12″ por minuto
Vertical 33″ á 6″ por minuto
Motor, cavalos, 6
Peso líquido, 3.270 kgs



REPRESENTANTE

ECO TRADING, LTD.ª

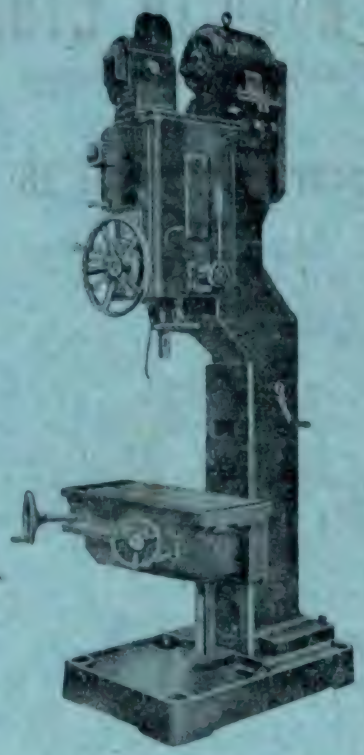
RUA DO CRUCIFIXO, 50, 3.º — LISBOA

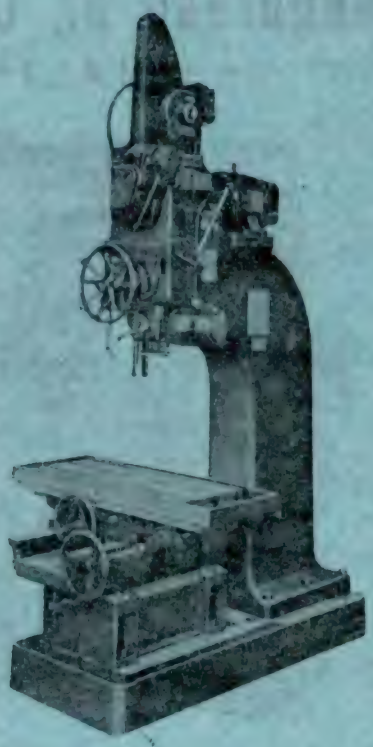
Telefones: **2 5808 e 2 0155**

End. Telegr.: **Ecotrading - Lisboa**

Máquinas e Ferramentas

MÁQUINAS DA CASA WILLIAM ASQUITH LTD., HALIFAX, INGLATERRA





ENGENHOS DE FURAR em todos os tamanhos

ASQUITH

ENGENHO DE FURAR RADIAL para a indústria caldeireira

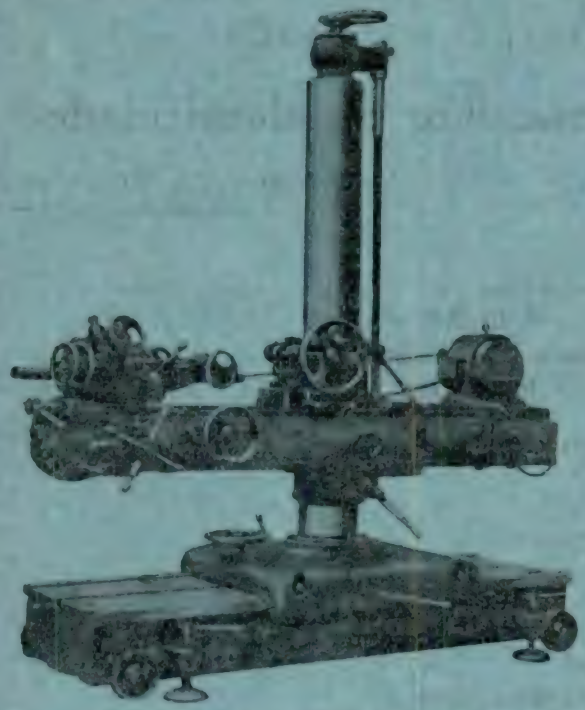
REPRESENTANTE

ECO TRADING, LTD.ª

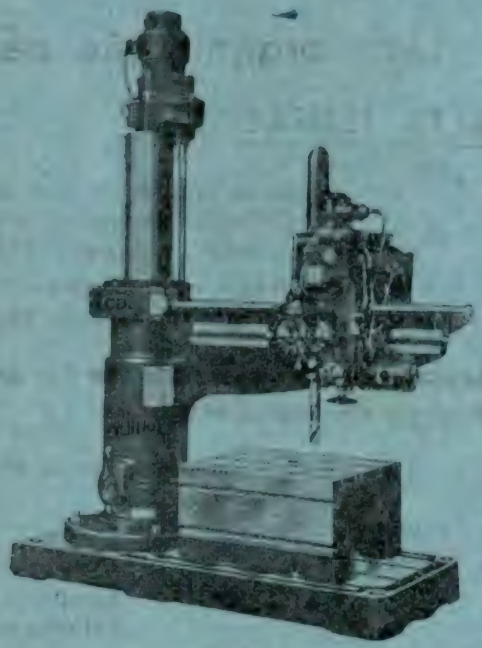
RUA DO CRUCIFIXO, 50, 3.º — LISBOA

Telefones: 25808 e 20155 End. Telegráfico: Ecotrading - Lisboa

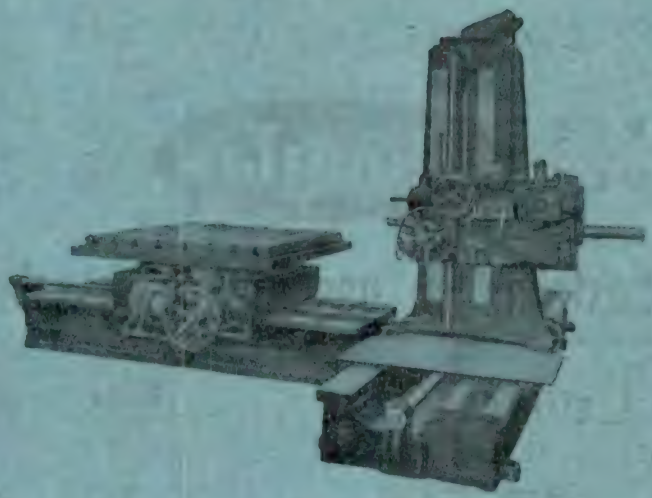
MÁQUINAS DA CASA WILLIAM ASQUITH LTD., HALIFAX, INGLATERRA



ENGENHO DE FURAR PORTÁTIL
para caldeiraria



ENGENHO DE FURAR RADIAL
em todos os tamanhos



MANDRILADORAS HORIZONTAIS

REPRESENTANTE

ECO TRADING, LTD.ª

RUA DO CRUCIFIXO, 50, 3.º — LISBOA

Telefones: 25808 e 20155

End. Telegráfico: Ecotrading - Lisboa

D. MOURA — ENGENHEIRO

REPARADORA ELECTRO-MECÂNICA

Uma organização para trabalhos de electricidade

ALTA TENSÃO — BAIXA TENSÃO

Oficinas de construções eléctricas.
Transformações de características e reparações em:
GERADORES — MOTORES — TRANSFORMADORES
e em tôda a aparelhagem eléctrica para usos industriais e agrícolas.
SERVIÇO DE ASSISTÊNCIA URGENTE À INDÚSTRIA

Instalações industriais de Fôrça Motriz e Luz
Portos de transformação

Com o nosso empréstimo de máquinas temos
evitado a paralização de muitas fábricas

RUA DA TRINDADE, 18-A — LISBOA
Telefone 21406
Telegramas — REPARADORA

CARROS INDUSTRIAIS

MOTORES MARÍTIMOS — **Douglas** — GRUPOS GERADORES

Motores industriais a gasolina e gasolina / petróleo

Série 1 cilindro		Série 2 cilindros	
B.H.P.	R.P.M.	B.H.P.	R.P.M.
2 1/2	1800	4	2500
4 1/2-5	1800	6 1/2	2000
6	1800	7	2000
7	1800	7 1/2	1800
		8 1/2	1800

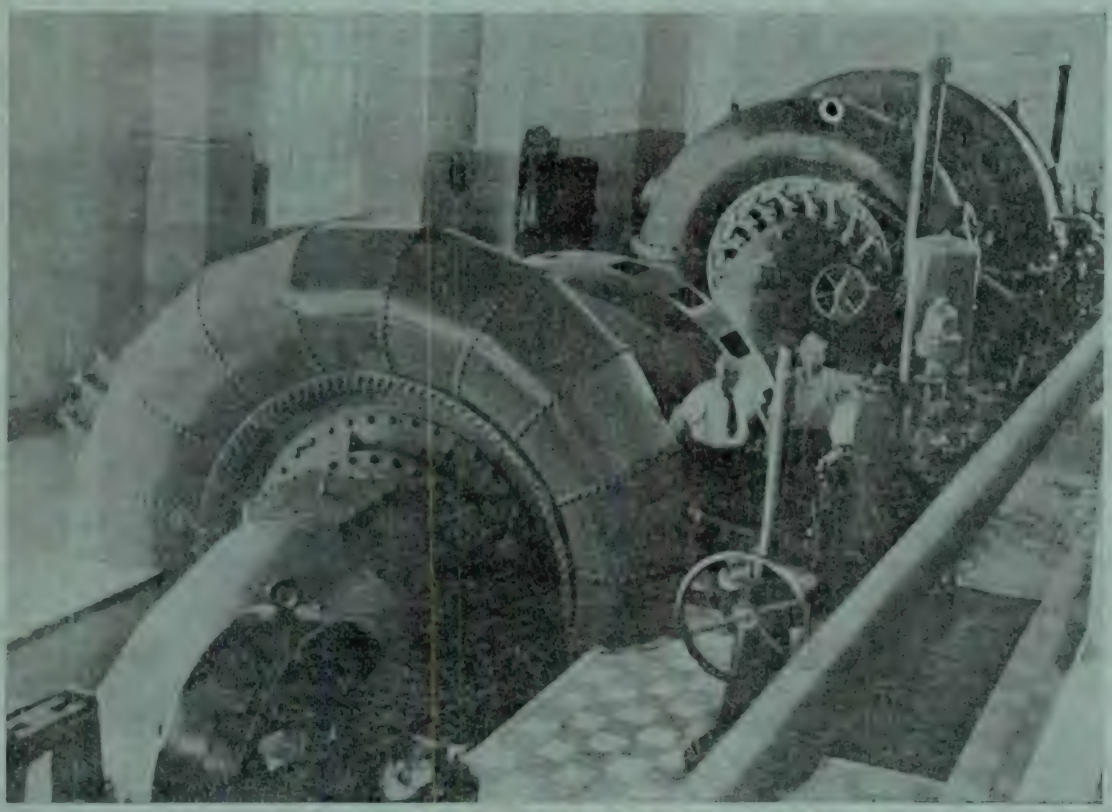
REPRESENTANTES EXCLUSIVOS PARA PORTUGAL

H. M. F. HATHERLY, L.DA — Rua do Comércio, 8 — Tel. 22001

ALLIS-CHALMERS

MANUFACTURING COMPANY

MILWAUKEE



CENTRAL HIDRO-ELÉCTRICA 6900 HP, 450 RPM, 4000 V

TURBINAS
ALTERNADORES
TRANSFORMADORES
RECTIFICADORES
DISJUNTORES

CENTRAIS HIDRO-ELÉCTRICAS COMPLETAS

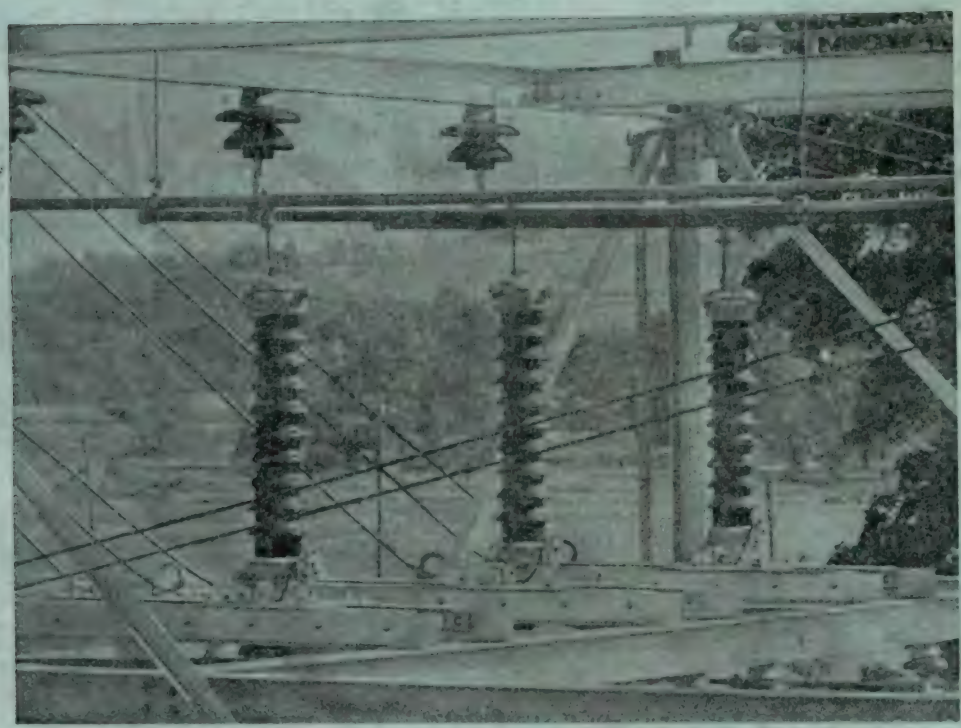
REPRESENTANTES EXCLUSIVOS

EST. HEROLD LDA.

RUA DOS DOURADORES, 7 - LISBOA - TEL. 24221 PABX 5 LINHAS

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Aparelhos de protecção «THYRITE» contra sobretensões

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléciricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas têxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

FUNDIÇÃO DE AÇO, FERRO E METAIS

Filtros para correcção de águas para fins Industriais

MÁQUINAS para as Indústrias de Moagem, Panificação e Massas
MÁQUINAS para a Indústria de Mármores
MÁQUINAS Agrícolas — Material Agrícola
MÁQUINAS em aço inoxidável

ALFREDO ALVES & C.ª (Filhos)

Engenheiros-Construtores: C. G. ALVES (Dec. 32204)

E

FÁBRICAS VULCANO E COLARES

Telefone PABX 23406/7 Telegramas: FREDALVES

Rua da Academia das Ciências, 5 — LISBOA

Filial no Porto: Praça D. João I, 25-1.º

Motores eléctricos. Transformadores.
Geradores e alternadores eléctricos.
Ferramentas eléctricas.
Bombas para todos os líquidos e tôdas as profundidades.
Grupos moto-bombas.
Motores de explosão para fins industriais e agrícolas.

Oficinas de:

Reparação e transformação de motores eléctricos e de explosão.
Transformadores e aparelhos eléctricos.

MECANO ELÉCTRICA, L.DA

RUA DA BOA VISTA, 88-94 — LISBOA

TELEFONE: 22300 Telegramas: MECTRICA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

CONTRA A HUMIDADE

FABRICA EM SACAVÉM

TELEFONE 20879 TELEG. EPALDA—LISBOA

OFICINAS E LABORATORIOS
DO
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

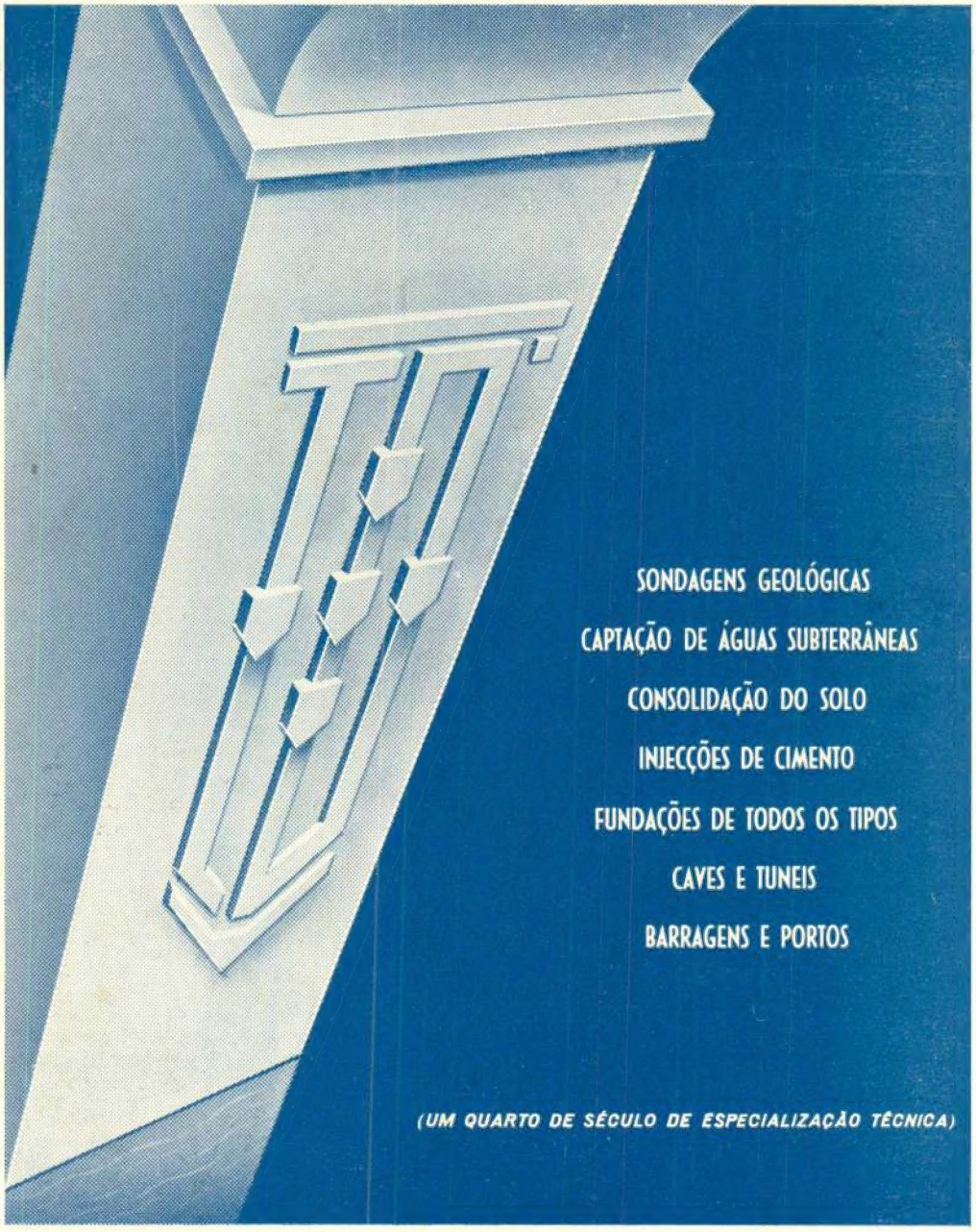
Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

Emprêsa de Sondagens e Fundações

TEIXEIRA DUARTE, L.DA

RUA DA BETESGA, 57, 3.º
TELEF. 2 3962

LISBOA



SOCIEDADE ANÓNIMA

BROWN, BOVERI & CIE.

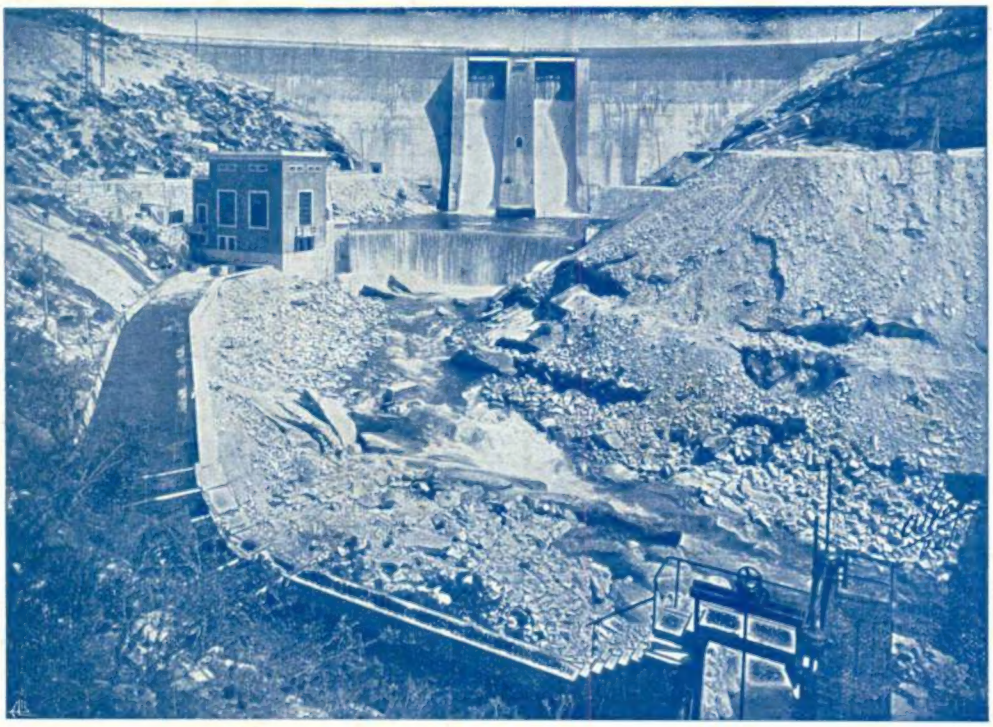
BADEN (SUISSA)

Representante geral para Portugal e Colónias:

EDOUARD DALPHIN

Escritório Técnico: Praça de D. João I, 25, 3.º Dir. // PORTO // Tel. 2411

Máquinas eléctricas, transformadores, mutadores, aparelhos para alta e baixa tensão. Montagem completa de centrais termo e hidro-eléctricas. Electrificação de fábricas e de caminho de ferro. Locomotivas, e auto-motoras eléctricas e Diesel-eléctricas. Máquinas de extracção. Turbinas a vapor. Geradores de vapor Velox. Máquinas frigoríficas. Grupos e transformadores para a soldadura pelo arco. Fornos eléctricos. Comandos eléctricos especiais para tôdas as máquinas utilizadas nas Fábricas de Fiação, Tecelagem Acabamentos, Estamparia, Cimento, Moagem, Material de alta frequência, Telegrafia, Telefonia, Telecomando, etc.



Barragem do Ermal, da Companhia Electro-Hidráulica de Portugal, com 20 milhões de metros cúbicos de capacidade da albufeira. Na parte central, duas comportas automáticas, da casa construtora «Ateliers des Charmilles», de 9 × 5 metros, para a evacuação das cheias. Em baixo, a central automática de Guilhofrei (I) com uma turbina vertical tipo Kaplan (Ateliers des Charmilles) de 2750 cavalos e o canal de condução da água à central do Ermal (central II) com uma turbina vertical tipo Francis de 6250 cavalos (Ateliers des Charmilles) e duas horizontais Escher-Wyss) de 500 e 1500 cavalos. Tôda a parte eléctrica (alternadores, transformadores, aparelhos de 2000 e 30000 Volts) da casa BROWN, BOVERI & Cie.